高１・高２ ベーシックレベル数学ⅡＢ を受講する皆さんへ

ようこそ，『スタディサプリ』の数学の講座へ！　この講座は

「数学ⅡＢを，用語や公式を覚えるところから学習したい。」

という人にピッタリの講座です。

高１・高２の皆さんはもちろん，**それ以外の学年の人**も大歓迎です。

高校数学は，中学校で学んだ数学を理解していることが前提です。さらに，数学ⅡＢを理解するためには，数学ⅠＡの理解がある程度あることが前提となります。ある分野で何かがあいまいになっていると，いきなりわからなくなってしまう，ということも少なくありません。心当たり，ありませんか？

でも，中学校の内容や数学ⅠＡで理解が不足しているから，今さらもう一回聞いてもわからない！そう思うかもしれません。ところがですね，あなたが「人の話を聞いてそれを理解する力」は，以前のあなたと比べると，間違いなく「今のあなたの方が上」なのです。

あきらめるのはまだ早い。今のあなたは，以前のあなたとは違う！

この自覚が大切です。そしてその自覚をもって数学と向き合えば，高校からでも，今からでも，数学をちゃんと理解することができますよ。

また，この講座は可能な限り

中学校や数学ⅠＡで学んだ公式を復習しながら，新しいところを学ぶ。

というコンセプトの元に作成されています。そして，

予習は必要なし！　「講義動画」で一から説明します！

テキストの使い方や，講座の受講の仕方については，後ほど詳しく説明します。

この講座をしっかり受講すれば，学校の授業の理解を深めることができますし，宿題もしっかりやることができるでしょう。**わかれば，面白い。面白ければ，もっとやりたくなる！**そんな自分になってみたいと思いませんか？

「人から人へ」。それは時代がどんなに進歩しても変わることがありません。直接会うことはなかなかできませんが，みなさんが真剣に動画を視聴すれば，まるで目の前に先生がいるような錯覚すら覚えることでしょう。なぜなら，先生はいつでも君たち一人ひとりが真剣に授業を受けている姿をカメラの向こうに思い浮かべながら授業しているのですから。

さぁ，そろそろ時間です。１回聞いてわからなければ，何回も受講しましょう。その先に，必ず未来は開けています。ようこそ『スタディサプリ』の世界へ！

山内　恵介

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜前編　目次＞

第１章　式と証明

第１講　式と計算
§１　３次式の展開，因数分解の公式
§２　二項定理
§３　整式の割り算
§４　分数式の計算

第２講　式と証明
§１　恒等式
§２　等式の証明
§３　不等式の証明
§４　相加平均と相乗平均

第３講　複素数と２次方程式
§１　複素数とその計算
§２　負の数の平方根と２次方程式
§３　２次方程式の解の判別
§４　２次方程式の解と係数の関係

第４講　剰余の定理と因数定理，高次方程式
§１　剰余の定理
§２　因数定理
§３　組立除法と因数分解
§４　高次方程式の解法

第２章　図形と方程式

第５講　点と直線
§１　２点間の距離
§２　座標平面上の点
§３　直線の方程式
§４　２直線の関係，点と直線の距離

第６講　円
§１　円の方程式
§２　円と直線の共有点の座標と個数
§３　円と直線の位置関係
§４　円の接線

第７講　軌跡と領域
§１　軌跡の方程式
§２　いろいろな軌跡
§３　不等式の表す領域
§４　連立不等式の表す領域

第３章　三角関数

第８講　三角関数とその性質
§１　動径と一般角
§２　弧度法
§３　三角関数
§４　三角関数の相互関係，三角関数の性質

第９講　三角関数のグラフ，方程式と不等式
§１　三角関数のグラフ
§２　いろいろな三角関数のグラフ
§３　三角関数を含む方程式
§４　三角関数を含む不等式

第10講　加法定理
§１　正弦・余弦の加法定理
§２　正接の加法定理，２直線のなす角
§３　倍角の公式，半角の公式
§４　三角関数の合成

第４章　指数関数・対数関数

第11講　指数法則と計算，指数関数のグラフ
§１　指数の整数への拡張
§２　累乗根とその性質
§３　指数の有理数への拡張
§４　指数関数とそのグラフ

第12講　指数を含む方程式・不等式，対数の性質と計算
§１　指数の相等と指数方程式
§２　累乗根の大小，指数不等式
§３　対数
§４　対数の性質

第13講　底の変換，対数関数のグラフと方程式・不等式，常用対数
§１　底の変換公式
§２　対数関数とそのグラフ
§３　対数の大小，対数方程式・不等式
§４　常用対数

（以降，後編に続く）

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜高１･２ スタンダードレベル数学ⅠＡⅡＢとの対応表＞

講	ベーシックレベル講座　タイトル	スタンダードレベル講座
第 1 講	式と計算	第1講　1−3・1−4 第28講　28−1・28−2・28−3
第 2 講	式と証明	第28講　28−4 第29講 第30講　30−1・30−2
第 3 講	複素数と2次方程式	第30講　30−3・30−4 第31講　31−1
第 4 講	剰余の定理と因数定理，高次方程式	第31講　31−2・31−3・31−4
第 5 講	点と直線	第19講
第 6 講	円	第20講
第 7 講	軌跡と領域	第21講
第 8 講	三角関数とその性質	第22講　22−1・22−2
第 9 講	三角関数のグラフ，方程式と不等式	第23講　23−1・23−2 第22講　22−3・22−4
第１０講	加法定理	第23講　23−3・23−4 第24講　24−1・24−2・24−3
	三角関数の最大・最小	第24講　24−4
第１１講	指数法則と計算，指数関数のグラフ	第25講　25−1・25−2
第１２講	指数を含む方程式・不等式，対数の性質と計算	第25講　25−3・25−4 第26講　26−1・26−2
第１３講	底の変換，対数関数のグラフと方程式・不等式，常用対数	第26講　26−2・26−3・26−4 第27講　27−1・27−2
	常用対数の利用，対数をとる	第27講　27−3・27−4

※「スタンダードレベル講座」は，スタディサプリ**「高１・２ スタンダードレベル数学ⅠＡⅡＢ」**の対応する講を表しています。
この「スタンダードレベル数学」を受講することで，「ベーシックレベル数学ⅡＢ」の内容を復習し，さらに理解を深めることができます。ぜひ，「スタンダードレベル数学」へ進んでください。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜講座の受講の仕方＞

ここでは，効果的な講座の受講の仕方についてお伝えします。講座は大きく「テキスト」「講義動画」「解答」に分かれています。この３つを効果的に使い，実力を伸ばしていきましょう。

① テキストについて

この講座のテキストは，講ごとに４つの §（セクション）に分かれています。

§1，§2，§3，§4 は，それぞれ次のような項目で構成されています。

「要点整理と公式」

⇒ そのセクションで習得すべき用語や要点，覚えるべき公式

「Point Pickup」

⇒「要点整理と公式」で学んだことをベースに，知識を整理

「講義問題」

⇒「要点整理と公式」「Point Pickup」で学んだことを定着させる問題

「練習問題」

⇒ 「講義問題」で学んだことを確認するための問題

「要点整理と公式」「Point Pickup」「講義問題」については，「動画」で解説を行います。それぞれの講や一部のセクションが未習，または理解が不十分でもまったく問題ありません。また，予習は必要ありません。

② 動画について

受講の準備ができましたら，テキストと筆記用具を手元におき，動画を再生してください。そして，真剣に受講して，先生がこの動画を通じて何を伝えたいのかを感じ取ってください。

それぞれの講の動画は，チャプター１からチャプター８（一部の講でチャプター９）まであります。これらのチャプターは，１つのセクションにつき２つのチャプター（一部３つのチャプター）がセットになっています。

（例）第１講　式と計算

§1 ･･･ チャプター１ & チャプター２

§2 ･･･ チャプター３ & チャプター４

§3 ･･･ チャプター５ & チャプター６

§4 ･･･ チャプター７ & チャプター８

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

それぞれのセクションにおける，主な受講の流れを説明します。

⑴　１つ目のチャプターで，**「要点整理と公式」**を解説します。このセクションで習得すべき重要な要点や，新しい公式を説明します。

必要なことはあらかじめテキストに書いてあります。その上で，一部「穴埋め」や「記述」が必要な部分があります。集中力を保ちながら先生の話に全力で耳を傾け，テキストを完成させていきましょう。

⑵　２つ目のチャプターで，**1**，**2**，**3**，**4** といった**「講義問題」**を解説します。

まずは「要点整理と公式」で習ったことを，**「Point Pickup」**でまとめます。「要点整理と公式」と同じく，一部「穴埋め」「記述」になっています。また，一部新しい知識や考え方も出てきます。

その後，「Point Pickup」で整理した知識を元に，先生が実際に問題を解いていきます。それぞれの問題が，どのようにして解答に至るかを動画でじっくり学んでください。メモをとっても構いませんが，ただ板書を書き写しても何の意味もありません。大切なのは集中して授業を受講すること。言葉の一つひとつにしっかりと耳を傾けてください。

先生の解説を聞いたあとで，見開き右側のページの**「解答」**欄に実際に自分で解いてみましょう。もちろん解説の途中で，一時停止して問題を解いても構いません。もし解いている途中で手が止まってしまったら，動画を巻き戻して見てください。

また，**「解答集」**には途中計算が書いてありますので，それを見てもよいでしょう。

「要点整理と公式」→「Point Pickup」→「問題の解説」→「自分で問題を解く」
これで１つのセクションが終了です。１つのセクションでおよそ 15 分～ 20 分です。

４つのセクションで１講分が終了します。時間がない時は，１日１セクションずつの受講で構いません。また，週末にまとめて１講分受講してもよいでしょう。

大事なのは

- **「集中力」**
- **「集中しよう」「何かをこの先生から得てやる」という「気持ち」**
- **数学ができるようになりたいという「思い」**

をもって受講することです。

動画に慣れていない人や，数学が苦手な人は，最初は「授業が速い！」と感じるかもしれません。この講座はいつでも画面を停止できます。また，必要に応じて何度も受講してください。受講を進めていくうちに，このペースにだんだん慣れていくでしょう。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

そして

・「やっぱり自分はできない」は厳禁！

です。あきらめず何度もチャレンジすること。必ずできるようになりますよ。

③ 復習について

その日の動画の受講が完了したら，「Point Pickup」をもう一度見てください。そして，

・このセクションから何を学んだか

を思い浮かべてみましょう。

また，後日，講義問題をもう一度解くことで，

・このセクションを受講して何ができるようになったか

を確かめてみましょう。もし解法が全然思いつかない，すっかり忘れてしまった，という場合は，もう一度そのセクションを受講することをお勧めします。

・「復習したときが，真の学習の完成」

です。

④ 確認テストについて

①～③が終わると，自分がその講の内容を本当に理解しているのか確かめたくなるはずです。各講の終わりに**「確認テスト」**を用意してあります。講義の問題に関連する問題ですので，この講で学んだことを参考に，自力で解いてみましょう。

・「自分はちゃんと理解できているのか」

それを問題を解くことで確認することができます。解き終えたら，「解答」を見て答えをチェックしてみましょう。この確認テストを解くことで，あなたの知識はさらに定着します。

以上を繰り返すことにより，飛躍的に理解が深まり，数学がだんだん解けるようになっていきます。

そして，受講を続ける上で大切なのは

・ペースを作り，守る

ことです。各セクション，およそ15分～20分。それを，どこの曜日のどの時間帯にやるかを決めましょう。そして，決めた曜日の決めた時間にしっかりと受講しましょう。学校に通う，予備校に通うのと同じように，「スタディサプリ」を受ける時間，数学から逃げずに本気で向きあう時間，これを確保してください。学校の宿題があろうと，部活で疲労し

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

ていようと，ペースを守ること。できない理由を作らないこと。それができることで，確実な「実力向上」とそれができることによる「自信」につながります。

　このベーシック講座は，あくまで基礎部分です。受講後は，**「高１・２ スタンダードレベル数学ⅠＡⅡＢ」**に進んでみてください。どの講を見ればよいのかは,「対応表」に載っています。自分の知識がどのように応用できるのか，それを知ると，もっと数学が好きになりますよ。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第1講　式と計算

§1　３次式の展開，因数分解の公式

要点整理 と 公式

要点１　３次式になる展開の公式

積の形が特別な形をしているとき，以下の「展開の公式」によりその途中計算を省略することができることを数学 Ⅰ で学んだ。

■ 展開の公式

・$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$　　・$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

・$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$　　・$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

・$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

上記に加え，ここでは展開した結果が3 次式になるものを以下に紹介する。

■ 展開の公式（３次式）

① $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

② $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

③ $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

④ $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

①について，実際に展開して確かめる。

$(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)\qquad=$

②についても，実際に展開することで確かめることができる。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

③について，実際に展開して確かめる。

$(a+b)(a^2-ab+b^2)=$

④についても，実際に展開することで確かめることができる。

要点２ 3 次式の因数分解の公式

整式がある特別な形をしているとき,「因数分解の公式」を使って因数分解することができることを数学 Ⅰ で学んだ。「因数分解の公式」は,「展開の公式」を逆に見ることで得られる。

ここでは，先ほどの展開の公式(3 次式)の③および④を逆にみることで，新たな「因数分解の公式」として以下に紹介する。

■ **因数分解の公式(3 次式)**

① $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

② $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1

［1］　次の式を展開せよ。

（1）　$(x+4)^3$　　（2）　$(3x-2y)^3$

（3）　$(x+5)(x^2-5x+25)$　　（4）　$(2a-3b)(4a^2+6ab+9b^2)$

［2］　次の式を因数分解せよ。

（1）　x^3+8　　（2）　$27a^3-64b^3$

Point Pickup

３乗で表される数

$8=$　　$27=$　　$64=$　　$125=$

上記は出現頻度が比較的高いので覚えておくとよい。

３次式の展開公式

公式が使える形を見抜き，積極的に公式を利用する。符号に注意。

①　$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$　　②　$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

③　$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$　　④　$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

３次式の因数分解の公式

公式が使える形を見抜き，積極的に公式を利用する。符号に注意。

①　$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$　　②　$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§2 ▶ 二項定理

要点整理 と 公式

要点 3 パスカルの三角形

$(a+b)^3$の展開の公式を導く際に，$(a+b)^2$の展開の公式を用いた。

同様に，$(a+b)^4$の展開を$(a+b)^3$の展開の公式をもとに行うと，以下のようになる。

$$(a+b)^4 = (a+b)(a+b)^3$$
$$= (a+b)(\qquad\qquad)$$
$$= a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3$$
$$\quad + a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4$$
$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

```
   1  3  3  1
+)    1  3  3  1
   1  4  6  4  1
```

$(a+b)^4$の展開式の係数だけを取り出すと，$(a+b)^3$の展開式の係数を「ずらして足した」ものとなっていることがわかる。

$(a+b)^n$の展開式の係数を並べると，右図のようになる。このような数の配列を「パスカルの三角形」という。

$(a+b)^1$	1　1
$(a+b)^2$	1　2　1
$(a+b)^3$	1　3　3　1
$(a+b)^4$	1　4　6　4　1

要点 4 二項定理

n 個のものから r 個取り出す「組合せ」の総数「　　　」を用いて，$(a+b)^n$の展開式における各項の係数を求める。

例えば，$(a+b)^2 = \overset{①}{(a+b)}\overset{②}{(a+b)}$ の展開式において，項 ab は

（1）①から a を選び，②から b を選んでかけたとき　　$(\underline{a}+b)(a+\underline{b})$

（2）①から b を選び，②から a を選んでかけたとき　　$(a+\underline{b})(\underline{a}+b)$

に出現する。

①，②のそれぞれから a，b のいずれか一方を選んでかけあわせることで，展開式の項が得られる。項 ab は，①，②の一方から a を，他方から b を選んで得られる。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

ここで，①，②ともに「項が　　　つ」なので，もし a を選ばなかった場合は，b が選ばれる。
つまり項 ab の「 a 」について

⑴は①から a を選ぶ（②からは b が選ばれる）

⑵は②から a を選ぶ（①からは b が選ばれる）

と見ることにより，a を「①，②のどちらから選ぶか」で，　　　通りある，といえる。
これが，$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ の展開式における ab の係数「 2 」である。

また，$(a+b)^3=\overset{①}{(a+b)}\overset{②}{(a+b)}\overset{③}{(a+b)}$ の展開式において，項 a^2b は①，②，③から a を 2 個，b を 1 個選んでかけあわせることで得られる。
それは，上記のように「 b 」1 個を「①～③のどこから選ぶか」で，　　通りある，といえる。

$(a+b)(a+b)(a+b)$ （1つ目の b に網掛け）
$(a+b)(a+b)(a+b)$ （2つ目の b に網掛け）
$(a+b)(a+b)(a+b)$ （3つ目の b に網掛け）

これが，$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ の展開式における a^2b の係数「 3 」である。

同様に，$(a+b)^3$ の展開式において

ab^2 の係数は，b を 2 個選ぶ ${}_3\mathrm{C}_2=3$

b^3 の係数は，b を 3 個選ぶ ${}_3\mathrm{C}_3=1$

a^3 の係数は，b を 0 個選ぶ ${}_3\mathrm{C}_0=1$　　　である。

一般に，以下のことが成り立つ。

■ 二項定理

$$(a+b)^n={}_n\mathrm{C}_0a^n+{}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b^1+{}_n\mathrm{C}_2a^{n-2}b^2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_ra^{n-r}b^r+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_nb^n$$

二項定理において，${}_n\mathrm{C}_ra^{n-r}b^r$ を，$(a+b)^n$ の展開式の「一般項」，係数 ${}_n\mathrm{C}_r$ を「二項係数」という。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2

(1)　二項定理を用いて，$(x+3)^5$ を展開せよ。

(2)　$(2x-3y)^6$ の展開式における，x^4y^2 の項の係数を求めよ。

Point Pickup

二項定理と一般項

$$(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0 a^n + {}_n\mathrm{C}_1 a^{n-1}b^1 + {}_n\mathrm{C}_2 a^{n-2}b^2 + \cdots\cdots + \underline{\qquad\qquad} + \cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_n b^n$$

⇧

展開式の「一般項」

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§3 ▶ 整式の割り算

要点整理 と 公式

要点5 整式の割り算

数学 A で学んだように，整数の割り算において

（割られる数）＝（割る数）×（商）＋（余り）

が成り立つ。

例えば，121 を 5 で割ったときの商は 24，余りが 1 であることより

121 ＝

と表される。このとき，（余り）＜（割る数）である。

$$\begin{array}{r|l} & 24 \\ 5\,) & 121 \\ & 10 \quad \cdots 5\times 2 \\ \hline & 21 \\ & 20 \quad \cdots 5\times 4 \\ \hline & 1 \end{array}$$

整式を整式で割る計算（筆算）を，上記と同じように行う。

（ex）$2x^2+7x+9$を $x+2$ で割る

$$x+2\,\overline{)\,2x^2+7x+9}$$

$2x^2+7x+9$ の最高次の項 $2x^2$ と

$x+2$ の最高次の項 x に注目。

x に何をかけると $2x^2$ になるかを考える。

$$\begin{array}{r} 2x \\ x+2\,\overline{)\,2x^2+7x+9} \\ 2x^2+4x \\ \hline 3x+9 \end{array} \quad \cdots(x+2)\times 2x$$

$x+2$ に $2x$ をかけたものを計算し，

$2x^2+7x+9$ から引くと，余りは $3x+9$

$$\begin{array}{r} 2x \\ x+2\,\overline{)\,2x^2+7x+9} \\ 2x^2+4x \\ \hline 3x+9 \end{array}$$

次に，$3x+9$ の最高次の項 $3x$ と

$x+2$ の最高次の項 x に注目。

x に何をかけると $3x$ になるかを考える。

$$\begin{array}{r} 2x+3 \\ x+2\,\overline{)\,2x^2+7x+9} \\ 2x^2+4x \\ \hline 3x+9 \\ 3x+6 \\ \hline 3 \end{array} \quad \cdots(x+2)\times 3$$

$x+2$ に 3 をかけたものを計算し，

$3x+9$ から引くと，余りは 3

（余りの次数）＜（割る式の次数）より，この計算はここで終了となる。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

よって，$2x^2+7x+9$　を　$x+2$　で割ったときの

商は $2x+3$　　　余りは 3

である。

一般に，以下のことが成り立つ。

■ 除法の原理（多項式）

整式 A を整式 B で割った商を Q，余りを R とすると

$$A=BQ+R$$

（R の次数）＜（B の次数）

$2x^2+7x+9$ を $x+2$ で割ったときの商は $2x+3$，余りは 3 であることより，

$2x^2+7x+9=$

つまり，（割られる式）＝（割る式）×（商）＋（余り）の形で表すことができる。

$A=BQ+R$ において，$R=0$（余りが 0），つまり $A=BQ$ となるとき，

A は B で「割り切れる」という。またこのとき，B は A の「　　　　」である，という。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3

次の整式 A を整式 B で割ったときの商と余りを求めよ。

(1)　$A = 3x^2 + x + 2$，$B = x - 3$　　(2)　$A = x^3 + 6x^2 - 5$，$B = x + 4$

Point Pickup

整式の割り算

整式 A を整式 B で割るとき

①　A，B を次数の高い順(降べきの順）に並べる。

②　筆算による割り算を行う。その際，割られる式 A に「欠けている次数の項」があれば，その部分をあけておく。

③　余りの次数が，割る式 B の次数より低くなったら終了。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

｛解答｝

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§4 ▸ 分数式の計算

要点整理 と 公式

要点6 分数式

「分数式」…2つの整式A，Bを用いて$\dfrac{A}{B}$の形で表され，Bに文字を含む式

(ex)　$\dfrac{2x^2+3x+1}{x+1}$，$\dfrac{1}{x}$　など

分数においては，分母と分子をその公約数で割っても，もとの分数と等しい。

$$\frac{6}{8}=\frac{3\times \cancel{2}}{4\times \cancel{2}}=\frac{3}{4}$$

分数式においても，分母と分子をその共通な「因数」で割っても，もとの分数と等しい。

$$\frac{2a}{3a^2b}=\frac{2\cdot \cancel{a}}{3ab\cdot \cancel{a}}=\frac{2}{3ab}$$

分数式の分母と分子を，その共通因数で割ることを「　　　」するという。

それ以上約分できない分数式を，「既約(きやく)分数式」という。

要点7 分数式の乗法・除法

分数式の乗法・除法は，分数と同様に行う。

$$\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}=\frac{A\times C}{B\times D},\qquad \frac{A}{B}\div\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\times\frac{D}{C}=\frac{A\times D}{B\times C}$$

分数式の計算結果は，既約分数式にしておく。

$$\frac{x-2}{x+1}\times\frac{x+3}{x-2}=$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

要点 8 分数式の加法・減法

分母が等しい分数式の加法・減法は，分数と同様に行う。

$$\frac{A}{C}+\frac{B}{C}=\frac{A+B}{C},\qquad \frac{A}{C}-\frac{B}{C}=\frac{A-B}{C}$$

また，分数式においては，分母と分子に 0 でない同じ整式をかけても，もとの分数と等しい。
これを用いて，分母が異なる分数式の加法・減法は，分母を同じ式にしてから行う。

$$\frac{1}{x+2}+\frac{x}{x+3}=$$

2 つ以上の分数式の分母を同じ整式にすることを，分数式を「　　　　」するという。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

4

［1］　次の分数式を約分し，既約分数式で表せ。

(1)　$\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$　　(2)　$\dfrac{x^2-8x+15}{x^2-3x-10}$

［2］　次の式を計算せよ。

(1)　$\dfrac{x^2-x}{x^2-3x-4}\div\dfrac{x-1}{x-4}$　　(2)　$\dfrac{1}{x^2+x}-\dfrac{2}{x^2+2x}$

Point Pickup

分数式の計算

$$\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}=\frac{A\times C}{B\times D},\qquad \frac{A}{B}\div\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\times\frac{D}{C}=\frac{A\times D}{B\times C}$$

$$\frac{A}{C}+\frac{B}{C}=\frac{A+B}{C},\qquad \frac{A}{C}-\frac{B}{C}=\frac{A-B}{C}$$

・分数式は，それ以上約分できない形(既約分数式)にする。

・四則計算の前に，それぞれの分数の分子や分母を「因数分解」できないか確かめる。
それによる約分はもちろん，通分のときにそれぞれの分数の分母に何をかければよいかがわかる。

・1つの分数式にまとめた後，分母，分子が「因数分解」できないか確かめる。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

｛解答｝

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第1講　確認テスト

1　次の $\boxed{}$ に当てはまる数を答えよ。

(1)　$(2x-3)^3 = 8x^3 - \boxed{アイ}\,x^2 + \boxed{ウエ}\,x - 27$

(2)　$x^3 + 64 = (x+4)(x^2 - \boxed{オ}\,x + 16)$

2　$(3x+2y)^5$ の展開式における x^2y^3 の係数は $\boxed{カキク}$ である。

3　整式 $2x^3 + x^2 - 2x - 8$ を整式 $x-2$ で割ったときの商は $\boxed{ケ}\,x^2 + \boxed{コ}\,x + \boxed{サ}$，余りは $\boxed{シ}$ である。

4　次の計算をしなさい。

(1)　$\dfrac{x^2-2x-15}{x^2+2x-8} \times \dfrac{x-2}{x+3} = \dfrac{x-\boxed{ス}}{x+\boxed{セ}}$

(2)　$\dfrac{5}{x^2-x-6} - \dfrac{4}{x^2-4} = \dfrac{\boxed{ソ}}{(x-\boxed{タ})(x-3)}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ Note }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第2講　式と証明

§1 ▶ 恒等式

要点整理 と 公式

要点1　恒等式と方程式

「恒等式」… 含まれている文字にどのような値を代入しても成り立つ等式

「方程式」… 含まれている文字にある特定な値を代入したときだけ成り立つ等式

(ex)　$(x+3)(x-2)=x^2+x-6$ …「　　　　」

　　　$(x+3)(x-2)=0$ 　　　　…「　　　　」

展開や因数分解の公式など，式の変形によって両辺が同じ式になる等式は，すべて恒等式である。

a，b，cを定数とするとき，

等式 $ax^2+bx+c=3x^2+4x+5$ が x についての恒等式であるための条件を考える。

この等式が x についての恒等式ならば，x にどのような値を代入しても成り立つ。

よって，$x=0,\ 1,\ -1$ を代入すると

$$c=5,\qquad a+b+c=12,\qquad a-b+c=4$$

が成り立つ。この連立方程式を解くと $a=3$，$b=4$，$c=5$ である。

逆に，$a=3$，$b=4$，$c=5$ のとき，明らかにこの等式は x についての恒等式である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

一般に，次のことが成り立つ。

■ **恒等式の性質**

整式 $P(x)$ と $Q(x)$ について

$P(x)=Q(x)$ が x についての恒等式

$\iff$ $P(x)$ と $Q(x)$ の同じ次数の項の係数が一致

特に，x の2次式について

$ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$ が x についての恒等式

$\iff$ $a=a'$，$b=b'$，$c=c'$

$ax^2+bx+c=0$ が x についての恒等式 $\iff$ $a=0$，$b=0$，$c=0$

※一般に，$P(x)$ と $Q(x)$ が x についての n 次（以下）の整式であるとき，等式 $P(x)=Q(x)$ が $n+1$ 個の異なる x の値に対して成り立つならば，この等式は x についての恒等式である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1

次の等式が，x についての恒等式であるとき，定数 a，b，c の値を求めよ。

$$2x^2-1=a(x-1)^2+b(x-1)+c$$

Point Pickup

恒等式の係数を決定する

$\Longrightarrow$　同類項を整理し，両辺の同じ次数の項の係数を＝で結ぶ。

$ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$ が x についての恒等式

$\Longleftrightarrow$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§2 ▶ 等式の証明

要点整理 と 公式

要点2 等式の証明

等式 $A = B$ を「証明する」とは，この等式が「 恒等式 」であることを示すことである。

以下のいずれかの方法が代表的な解法である。

■ 等式 $A = B$ の証明

① A を変形して B を導く，または B を変形して A を導く。

② A，B をそれぞれ変形して，同じ式 C を導く。

③ $A - B = 0$ であることを導く。

(ex) 等式 $(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$ を証明する。

①の方法を用いると

(右辺) $= a^2 - 2ab + b^2 + 4ab = a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 =$ (左辺)

よって，$(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$

要点3 条件つきの等式の証明

ここでは，ある条件のもとでつねに成り立つ等式を証明する。

(ex) $a + b = 2$ のとき，等式 $a^2 + 2b = b^2 + 2a$ を証明する。

$a + b = 2$ のとき $b =$

このとき

(左辺) $= a^2 + 2(2-a) = a^2 + 4 - 2a = a^2 - 2a + 4$

(右辺) $= (2-a)^2 + 2a = 4 - 4a + a^2 + 2a = a^2 - 2a + 4$

よって，$a^2 + 2b = b^2 + 2a$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

要点4 比例式

$a:b=c:d$ のとき $\dfrac{a}{b}=$ 　　である。

このように，比の値が等しいことを示す等式を「比例式」という。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2

次の等式を証明せよ。

(1)　$x^4 - 1 = (x-1)(x^3 + x^2 + x + 1)$

(2)　$a + b + c = 0$ のとき，$a^2 + b^2 = c^2 - 2ab$

(3)　$\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ のとき，$\dfrac{a+c}{b+d} = \dfrac{a-c}{b-d}$

Point Pickup

等式 $A = B$ の証明

以下のいずれかの方法で証明する。

①　A を変形すると B になる　または　B を変形すると A になる

②　A，B それぞれを変形すると同じ式になる

③　$A - B$ を計算して 0 になる $(A - B = 0)$

等式の証明(条件式あり)

条件式を用いて，ある文字を消去して進める。

条件式が比例式の場合は，(比例式)　　　　とおくとよい。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§3 不等式の証明

要点整理 と 公式

要点5 実数の大小関係

2つの実数 a, b について，a　　b, a　　b, a　　b のいずれか1つの関係だけが成り立つ。

また，実数 a, b, c の大小関係について，次の性質が成り立つ。

■ 実数の大小関係

① $a > b,\ b > c \Longrightarrow a > c$

② $a > b \Longrightarrow a + c > b + c,\quad a - c > b - c$

③ $a > b,\ c > 0 \Longrightarrow ac > bc,\ \dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{c}$

$a > b,\ c < 0 \Longrightarrow ac < bc,\ \dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{c}$

②より，$a > b \Longrightarrow a - b > b - b$　つまり $a - b > 0$

$a - b > 0 \Longrightarrow a - b + b > 0 + b$　つまり $a > b$

よって　$a > b \Longleftrightarrow a - b > 0$　が成り立つ。

この性質を，不等式の証明に用いることができる。

■ 不等式 $A > B$ の証明

$\Longrightarrow$ $A - B > 0$ を証明する。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

要点6 実数の平方

実数の大小関係から　$a > 0 \Longrightarrow a^2 > 0$　　$a < 0 \Longrightarrow a^2 > 0$　がいえる。

また，$a = 0 \Longrightarrow a^2 = 0$　である。

よって，実数の平方について，次のことがいえる。

■ 実数の平方の性質

実数 a について，$a^2 \geqq 0$　等号が成り立つのは $a = 0$ のとき

※ $a > 0$，$b > 0$ のとき，a^2 と b^2 の大小について　$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

よって，$a^2 - b^2$ と $a - b$ の符号は一致。

つまり，$a^2 - b^2 > 0 \Longleftrightarrow a - b > 0$　より　$a^2 > b^2 \Longleftrightarrow a > b$

$a^2 - b^2 = 0 \Longleftrightarrow a - b = 0$　より　$a^2 = b^2 \Longleftrightarrow a = b$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3

(1)　$a>1$，$b>1$ のとき，不等式 $ab+1>a+b$ を証明せよ。

(2)　x，y が実数のとき，不等式 $x^2+y^2 \geqq 2xy$ を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(3)　$a>0$ のとき，不等式 $a+2>2\sqrt{a+1}$ を証明せよ。

Point Pickup

不等式 $A>B$ の証明

$\Longrightarrow$ $A-B$　　を示す。つまり $A-B$ を計算して，それが　　であることを示す。

主に次の性質が用いられる。

・(正) + (正) = (正)　　(正) × (正) = (正)　　(負) × (負) = (正)

・実数 a，b について

$a^2 \geqq 0$ (等号成立は $a=0$)　　$a^2+b^2 \geqq 0$ (等号成立は $a=b=0$)

・$a>0$，$b>0$ のとき

$a^2>b^2 \iff a>b$　　$a^2 \geqq b^2 \iff a \geqq b$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

｛解答｝

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§4 ▶ 相加平均と相乗平均

要点整理 と 公式

要点7 相加平均と相乗平均の大小関係

2つの実数 a, b について，　　　　をaとbの「相加平均」という。

また，$a>0$, $b>0$ のとき，　　　　をaとbの「相乗平均」という。

(ex) 2数7と28について

相加平均は　　　　　　　　　　相乗平均は

相加平均と相乗平均には，次の大小関係が成り立つ。

■ 相加平均と相乗平均の大小関係

$a>0$, $b>0$ のとき　　$\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$ …（相加平均）≧（相乗平均）

等号が成り立つのは $a=b$ のとき

$a>0$, $b>0$ のとき

$(a+b)^2-(2\sqrt{ab})^2=a^2+2ab+b^2-4ab=a^2-2ab+b^2$

$=$

よって，$(a+b)^2-(2\sqrt{ab})^2 \geqq 0$　つまり　$(a+b)^2 \geqq (2\sqrt{ab})^2$

$a+b>0$, $2\sqrt{ab}>0$　より　$a+b \geqq 2\sqrt{ab}$

したがって，$\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$

等号が成り立つのは　　　　　つまり　$a=b$　のとき

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ メモ }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

4

$x > 0$ のとき，不等式 $x + \dfrac{4}{x} \geqq 4$ を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

Point Pickup

（相加平均）≧（相乗平均）

$a > 0$，$b > 0$ のとき（相加平均）≧（相乗平均），つまり

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$$

が成り立つ。等号成立は $a = b$ のとき。

これを用いて，

「積が一定である２数の和」の形を含む不等式を証明することができる。

また，この不等式は　　　　　　　　　　の形で用いられることも多い。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第2講　確認テスト

1 等式 $2x^2+3x+4=a(x+2)^2+b(x+2)+c$ が x についての恒等式となるのは

$a=$ ア ，$b=-$ イ ，$c=$ ウ のときである。

2 $a+b=1$ のとき，等式 $a^2+b^2+1=2(a+b-ab)$ を証明する。

$a+b=1$ より，$b=1-a$

このとき，（左辺）＝ エ $(a^2-a+$ オ $)$，（右辺）＝ カ $(a^2-a+$ キ $)$ より

$a^2+b^2+1=2(a+b-ab)$

3 $a>b$ のとき，不等式 $4a-3b>2a-b$ を証明する。

$(4a-3b)-(2a-b)=$ ク $(a-b)$

$a>b$ より ク $(a-b)>0$

よって $(4a-3b)-(2a-b)>0$

したがって　$4a-3b>2a-b$

4 $a>0$ のとき，不等式 $a+\dfrac{9}{a}\geqq 6$ を証明する。

$a>0$，$\dfrac{9}{a}>0$ より，（相加平均）≧（相乗平均）から

$$a+\frac{9}{a}\geqq \text{ケ}\sqrt{a\cdot\frac{9}{a}}=\text{ケ}\cdot\text{コ}=\text{サ}$$

よって $a+\dfrac{9}{a}\geqq 6$

等号が成り立つのは $a=\dfrac{9}{a}$ のときで，$a>0$ より $a=$ シ のときである。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ Note }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第3講　複素数と2次方程式

§1　複素数とその計算

要点整理 と 公式

要点1　数の範囲の拡張と虚数単位

2次方程式 $x^2 = 3$ は，有理数の範囲では解をもたない。しかし，その範囲を実数まで広げると，$x = \pm\sqrt{3}$ という無理数の解をもつ。

x が実数のとき，$x^2 \geqq 0$ である。よって，2次方程式 $x^2 = -3$ は，実数の範囲では解をもたないことがわかる。

ここでは，2次方程式が常に解をもつように，数の範囲をさらに拡張する。

2乗して -1 になる新しい数を考え、その数を文字「　　」で表す。つまり

$i^2 = -1$

とする。この i を「虚数単位（きょすう）」という。これを定義することで，負の数の平方根，つまり「2乗すると負の数」になる数を扱うことができるようになる。

要点2　複素数

「複素数」… a，b を実数として，$a + bi$ の形で表される数。

a を「実部」，b を「虚部」という。

(ex) $3 - 4i$ の実部は「　　」，虚部は「　　　」

虚部 $b = 0$ のとき，複素数 $a + bi$ は実部 a だけとなり，これは実数を表している。

虚部 $b \neq 0$ のとき，複素数 $a + bi$ を「虚数」といい，さらに実部 $a = 0$ の数 bi を「純虚数」という。

〈 複素数 $a + bi$ 〉

$b=0$	$b \neq 0$
実数　a	虚数　$a+bi$ 純虚数　bi

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

要点3 複素数の相等と共役な複素数

2つの複素数が等しいのは，実部も虚部も等しいとき，と定める。

■ 複素数の相等

a，b，c，d が実数のとき

$a + bi = c + di \iff a = c$ かつ $b = d$

とくに，$a + bi = 0 \iff a = 0$ かつ $b = 0$

虚部の符号だけが異なる2つの複素数 $a + bi$ と $a - bi$ を，互いに「共役（きょうやく）な複素数」という。実数 a と共役な複素数は a である。

※虚数を扱うときは，数の大小関係や正・負は考えない。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1

［1］　次の計算をせよ。

（1）　$(3+2i)-(2-4i)$　　（2）　i^3+i^2+i+1　　（3）　$(2+i)(3-5i)$

［2］　次の式を計算し，$a+bi$　の形で表せ。

（1）　$\dfrac{4}{2+3i}$　　（2）　$\dfrac{2i}{1-i}$

Point Pickup

複素数の加法，減法，乗法

虚数単位 i を文字のように考えて計算する。

また，$i^2=$　　　を用いて式を簡単にする。

計算結果は $a+bi$ の形にする。

複素数の除法

分母と共役な複素数を分母，分子に掛けて，分母を実数にする。

$(a+bi)(a-bi)=a^2-b^2i^2=a^2-b^2(-1)=a^2+b^2$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§2 負の数の平方根と２次方程式

要点整理 と 公式

要点4 負の数の平方根

数の範囲を複素数まで広げると，負の数の平方根を考えることができる。

負の数-3の平方根は，「2 乗して-3になる数」である。ここで，

$(\sqrt{3}\,i)^2=(\sqrt{3})^2 i^2=$　　　　　　　　，$(-\sqrt{3}\,i)^2=(-\sqrt{3})^2 i^2=$

より，$\sqrt{3}\,i$，$-\sqrt{3}\,i$ は負の数 -3 の平方根である。

一方で，正の数 a の平方根は，$\sqrt{a}$ と$-\sqrt{a}$ であるが，a が負のときにもこの表し方を適用すると，-3 の平方根は $\sqrt{-3}$と$-\sqrt{-3}$ と表すことができる。

よって，$\sqrt{-3}=\sqrt{3}\,i$，$-\sqrt{-3}=-\sqrt{3}\,i$　と考えることができる。

$a>0$のとき，記号$\sqrt{-a}$ を$\sqrt{a}\,i$ と定めると，以下のことがいえる。

■ 負の数の平方根

$a>0$のとき

$\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$　　特に$\sqrt{-1}=i$

$-a$ の平方根は，$\pm\sqrt{-a}=\pm\sqrt{a}\,i$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

要点⑤ 2次方程式の解

ここでは，2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ （a，b，c は実数）の解を，複素数の範囲で考える。

2次方程式 $x^2=k$ の解は，k の正負に関係なく $x=\pm\sqrt{k}$ となる。

また，次の公式が，根号の中の正負を問わず成り立つ。

■ 2次方程式の解の公式

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

（ex）2次方程式 $2x^2+3x+4=0$ の解は

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot2\cdot4}}{2\cdot2}=\frac{-3\pm\sqrt{-23}}{4}=$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2

［1］　次の計算をせよ。

（1）　$\sqrt{-2}\sqrt{-6}$　　（2）　$\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}}$

［2］　次の2次方程式を解け。

（1）　$x^2 = -9$　　（2）　$7x^2 - 2x + 1 = 0$

Point Pickup

負の数の平方根

$a > 0$ のとき　$\sqrt{-a} = \sqrt{a}\,i$　　（ex）$\sqrt{-2} =$

複素数の計算においては，$\sqrt{-a}$ を $\sqrt{a}\,i$ に書き換える作業を最優先に行う。

2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解法

①　左辺の因数分解を考える。

②　$x^2 = k$　の解は，k の正負にかかわらず　$x = \pm\sqrt{k}$

③　解の公式　$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

とくに，$ax^2 + 2b'x + c = 0$（x の係数が偶数）のときは，

公式　$x = \dfrac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$ を使うとよい。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§3　2次方程式の解の判別

要点整理 と 公式

要点6　2次方程式の解の種類と判別式

方程式の解のうち，実数であるものを「　　　　　」，虚数であるものを「　　　　　」という。

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ である。

この解の種類は，根号の中の式 b^2-4ac の符号によって次の3つに分類することができる。

① $b^2-4ac>0$ のとき，異なる2つの　　　　解

② $b^2-4ac=0$ のとき，ただ1つの　　　　解（「　　　　」）

③ $b^2-4ac<0$ のとき，異なる2つの　　　　解

b^2-4acを，2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の「　　　　　」といい，記号「　　」で表す。

■ 2次方程式の解の種類の判別

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解について，$D=b^2-4ac$ とおくと以下。

$D>0$ $\Longleftrightarrow$ 異なる2つの実数解をもつ

$D=0$ $\Longleftrightarrow$ ただ1つの実数解（重解）をもつ

$D<0$ $\Longleftrightarrow$ 異なる2つの虚数解をもつ

※2次方程式の異なる2つの虚数解は，互いに共役な複素数である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ メモ }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3

［1］　次の2次方程式の解の種類を判別せよ。

(1)　$2x^2-3x+4=0$　　(2)　$3x^2+4x-1=0$

(3)　$x^2+2\sqrt{3}x+3=0$

［2］　2次方程式 $x^2-2ax+a+2=0$ が実数解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

Point Pickup

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解の判別

$\Longrightarrow$　判別式 $D=b^2-4ac$　の符号を調べる。

$D>0 \iff$　異なる2つの実数解 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ をもつ

$D=0 \iff$　重解　$x=-\dfrac{b}{2a}$ をもつ

$D<0 \iff$　異なる2つの虚数解　$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$　をもつ

重解も実数より，$D\geqq 0 \iff$　実数解をもつ

2次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ の判別式

2次方程式が $ax^2+2b'x+c=0$ の形のときは，

$\dfrac{D}{4}=b'^2-ac$　　の符号を調べるとよい。

$D=(2b')^2-4ac=4b'^2-4ac=4(b'^2-ac)$

よって，D の符号と $\dfrac{D}{4}=b'^2-ac$　の符号は一致する。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§4 ▶ 2次方程式の解と係数の関係

要点整理 と 公式

要点7　2次方程式の解と係数の関係

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ である。

ここで，$\alpha=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，$\beta=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ とすると

$$\alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{(-b)^2-\left(\sqrt{b^2-4ac}\right)^2}{4a^2}$$

$$=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

よって，2解の和 $\alpha+\beta$ と2解の積 $\alpha\beta$ はともに実数となり，

2次方程式の係数 a，b，c で表される。

■ **2次方程式の解と係数の関係**

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の2解を α，β とすると

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

要点8　2次式の因数分解

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の2つの解を α，β とするとき

$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}\right)=a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}=a(x-\alpha)(x-\beta)$ と変形できる。

■ 2次式の因数分解

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の2つの解を α，β とすると

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

(ex) x^2-4x+7 を複素数の範囲で因数分解する。

x^2-4x+7 の解は，$x=\dfrac{2\pm\sqrt{2^2-1\cdot7}}{1}=2\pm\sqrt{-3}=2\pm\sqrt{3}i$

よって，$x^2-4x+7=\{x-(\qquad\qquad)\}\{x-(\qquad\qquad)\}$

$=(x-2-\sqrt{3}i)(x-2+\sqrt{3}i)$

要点9　2数を解とする2次方程式

2数 α，β を2解にもつ2次方程式は

$$a(x-\alpha)(x-\beta)=0 \qquad (a\neq0)$$

の形で表される。このうち x^2 の係数 a が1のものは

$(x-\alpha)(x-\beta)=0$　　つまり $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$ である。

よって，次のことがいえる。

■ 2数 α，β を解とする2次方程式

2数 α，β を解とする2次方程式の1つは

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

4

［1］ 2次方程式 $x^2 - x - 5 = 0$ の2解を α，β とするとき，次の式の値を求めよ。

(1) $\alpha + \beta$　(2) $\alpha\beta$　(3) $\alpha^2 + \beta^2$　(4) $\alpha^3 + \beta^3$

［2］ 次の2数を解にもつ2次方程式を1つ作れ。

(1) $3, -2$　(2) $-1 + 4i, -1 - 4i$

Point Pickup

2次方程式の解と係数の関係

2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の2解を α，β とすると

$\alpha + \beta =$ 　　，$\alpha\beta =$

対称式

$a^2 + b^2$ のように，文字を入れ替えても元の式と変わらない式のことを

「対称式」という。

2文字 a, b の「基本対称式」は「$a + b$」,「ab」である。

すべての対称式は，基本対称式のみで表すことができる。

$(a + b)^2 =$ 　　　　　　より　$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$

$(a + b)^3 =$ 　　　　　　より

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3a^2b - 3ab^2 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$$

2数 α，β を2解にもつ2次方程式

2数 α，β を2解にもつ2次方程式の1つは，$p = \alpha + \beta$，$q = \alpha\beta$ とすると

$x^2 - px + q = 0$ である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第3講　確認テスト

1　次の計算をせよ。

(1)　$(2+4i)-(1-i)=$ ア $+$ イ i

(2)　$\dfrac{i}{2+i}=\dfrac{\text{ウ}}{\text{エ}}+\dfrac{\text{オ}}{\text{エ}}i$

2　(1)　$\sqrt{-3}\sqrt{-12}=$ カキ である。

(2)　次の2 次方程式を解け。

(i)　$x^2=-3$　　　$x=\pm\sqrt{\text{ク}}\,i$

(ii)　$3x^2+2x+5=0$　　　$x=\dfrac{-\text{ケ}\pm\sqrt{\text{コサ}}\,i}{3}$

3　2 次方程式 $x^2-mx+2m-3=0$ が異なる 2 つの虚数解をもつとき，m のとりうる値の範囲は シ $< m <$ ス である。

4　2 次方程式 $x^2-3x+5=0$ の 2 解を α，β とするとき，$\alpha+\beta=$ セ，$\alpha\beta=$ ソ，$\alpha^2+\beta^2=$ タチ である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ Note }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第4講　剰余の定理と因数定理，高次方程式

§1 剰余の定理

要点整理 と 公式

要点1 剰余の定理

x についての整式を $P(x)$ などと書く。

また，整式 $P(x)$ の x に，ある数 k を代入したときの値を $P(k)$ と書く。

(ex) $P(x) = x^2 + 3x - 4$ とすると，$P(2) = 2^2 + 3\cdot2 - 4 = 6$

$P(x) = x^2 + 3x - 4$ について，$P(x)$ を $x - 2$ で割ると，

商が $x + 5$，余りが 6 である。このことから，除法の原理により，

$$\begin{array}{r} x+5 \\ x-2\,\overline{)\,x^2+3x-4} \\ \underline{x^2-2x} \\ 5x-4 \\ \underline{5x-10} \\ 6 \end{array}$$

$P(x) = (x - 2)(x + 5) + 6$

と表される。この両辺に $x = 2$ を代入すると，

$P(2) = \qquad \cdot 7 + 6 =$

となり，この値は余り 6 と一致する。

整式 $P(x)$ を 1 次式 $x - k$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを R とすると，

R は定数となる。このとき，除法の原理より

$P(x) = (x - k)Q(x) + R$

と表される。この両辺に $x = \qquad$ を代入すると

$P(\quad) = \qquad \cdot Q(\quad) + R = R$

となり，この値は余り R と一致する。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

よって，以下の定理が成り立つ。

■ 剰余の定理

整式 $P(x)$ を 1 次式 $x-k$ で割った余りは $P(k)$ である。

この剰余の定理を用いると，整式を 1 次式で割ったときの余りを，実際に割り算することなく簡単に求めることができる。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1

整式 $P(x)=x^3+3x^2-2x+4$ を次の1次式で割ったときの余りを求めよ。

(1)　$x-1$　　(2)　$x+3$　　(3)　$2x-1$

Point Pickup

整式 $P(x)$ を1次式で割ったときの余り

$\Longrightarrow$　剰余の定理を利用する

割る式が　$x-k$　のとき　$\Longrightarrow$　余りは　$P(k)$

割る式が　$ax+b$　のとき　$\Longrightarrow$　余りは　$P\left(-\dfrac{b}{a}\right)$

整式 $P(x)$ を1次式 $ax+b$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを R とすると

$P(x)=$　　　　　　　　　　と表される。

$ax+b=$　　　となる x は $ax=-b$　より　$x=-\dfrac{b}{a}$

よって，$P\left(-\dfrac{b}{a}\right)=R$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§2 ▶ 因数定理

要点整理 と 公式

要点2 因数定理

整式 $P(x)$ を1次式 $x-k$ で割ったときの余りが0，つまり $x-k$ で割り切れるとき，

剰余の定理より $P(k)=0$ である。

このとき，$P(x)=(x-k)Q(x)$ の形で表されることより，

$x-k$ は $P(x)$ の「　　　」であることがわかる。

よって，以下の定理が成り立つ。

■ **因数定理**

整式 $P(x)$ が $x-k$ を因数にもつ　$\Longleftrightarrow$　$P(k)=0$

この因数定理を用いると，3次式やそれ以上の次数の式を因数分解することができる。

(ex) $P(x)=x^3-4x^2+x+6$ について

$P(1)=1^3-4\cdot1^2+1+6=4$　　よって，$x-1$ は $P(x)$ の因数「　　　　」

$P(2)=2^3-4\cdot2^2+2+6=0$　　よって，$x-2$ は $P(x)$ の因数「　　　　」

$P(x)\div(x-2)$ を計算することにより

$P(x)=(x-2)(x^2-2x-3)$

$=(x-2)(x+1)(x-3)$

$$
\begin{array}{r}
x^2-2x-3 \\
x-2\,\big)\,\overline{x^3-4x^2+x+6} \\
\underline{x^3-2x^2} \\
-2x^2+x \\
\underline{-2x^2+4x} \\
-3x+6 \\
\underline{-3x+6} \\
0
\end{array}
$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ メモ }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2

因数定理を用いて，$2x^3 + 9x^2 - 6x - 5$ を因数分解せよ。

Point Pickup

次数が高い整式の因数分解

$\Longrightarrow$　因数定理を利用する

① $P(k) = 0$　となる k を見つける。

k の値の候補は　$\pm\dfrac{\text{定数項の約数}}{\text{最高次の項の係数の約数}}$　である。

② $P(x) \div (\qquad\qquad)$　を計算する。

その商を $Q(x)$ とすると，因数定理より $P(x) = (x - k)Q(x)$ となる。

③ $Q(x)$ を因数分解する。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§3 ▶ 組立除法と因数分解

要点整理 と 公式

要点3 組立除法

整式 $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ を1次式 $x - k$ で割ったときの商を $Q(x) = Ax^2 + Bx + C$, 余りを R とする。

除法の原理より $P(x) = (x - k)Q(x) + R$

つまり　$ax^3 + bx^2 + cx + d = (x - k)(Ax^2 + Bx + C) + R$　が成り立つ。

右辺を x について整理すると

$$Ax^3 + (B - Ak)x^2 + (C - Bk)x + (R - Ck)$$

これを左辺と「係数比較」して

$$A = a,\ B - Ak = b,\ C - Bk = c,\ R - Ck = d$$

つまり $A = a,\ B = b + Ak,\ C = c + Bk,\ R = d + Ck$ となる。

これを図示すると以下のようになる。

a	b	c	d
	Ak	Bk	Ck
A	B	C	R

これを用いると，整式$P(x)$を 1 次式で割ったときの商と余りを求めることができる。

(ex) $2x^3 - 5x^2 + 3x - 10$ を $x - 3$ で割ったときの商と余りを求める。

2	−5	3	−10	⌊

この手順を「　　　　　　」という。

この組立除法を用いると，3 次式やそれ以上の次数の式を因数分解するときに，筆算の計算をせずに求めることができる。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ メモ }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3

(1)　組立除法を用いて，整式 $x^3 - 7x^2 - 11x + 10$ を $x + 2$ で割ったときの商と余りを求めよ。

(2)　組立除法を用いて，整式 $x^3 + x^2 - 21x - 45$ を因数分解せよ。

Point Pickup

次数が高い整式の因数分解 その②

①　$P(k) = 0$ となる k の見当をつける。

k の値の候補は　$\pm \dfrac{\text{定数項の約数}}{\text{最高次の項の係数の約数}}$　である。

②　$P(x) \div (x - k)$ を「　　　　　」で計算する。

その商を $Q(x)$，余りを R とするとき，$R = 0$ になるまで①と②を繰り返す。

$R = 0$ のとき，因数定理より $P(x) = (x - k)Q(x)$ となる。

③　$Q(x)$ を因数分解する。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§4 ▸ 高次方程式の解法

要点整理 と 公式

要点4 高次方程式

x の整式 $P(x)$ を n 次の整式とするとき，$P(x)=0$ の形で表される方程式を「n 次方程式」という。とくに，3 次以上の方程式を「高次方程式」という。

要点5 因数分解による解法

(ex) 3 次方程式 $x^3=1$ を解く。

移項して $x^3-1=0$

左辺を因数分解すると

よって，$x-1=0$ または $x^2+x+1=0$

したがって $x=1,$

※ 3 乗して a になる数を，a の「3 乗根」(または「立方根」)という。

a の 3 乗根は，方程式 $x^3=a$ の解である。

要点6 因数定理による解法

(ex) 3 次方程式 $x^3-2x^2-5x+6=0$ を解く。

$P(x)=x^3-2x^2-5x+6$ とすると，$P(1)=0$ より

$P(x)$ は $x-1$ を「　　　　　　」

$P(x)=(x-1)(x^2-x-6)=(x-1)(x+2)(x-3)$

よって $P(x)=0$ の解は $x=1,\ -2,\ 3$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

要点7 重解

方程式 $(x-2)^2(x+3)=0$ の解は $x=2,\ -3$ である。

この方程式の解2を，この方程式の「2重解」(または「重解」)という。

また，方程式 $(x+1)^3=0$ の解 -1 を，この方程式の「3重解」という。

2重解を重なった2個の解，3重解を重なった3個の解と考えると，

複素数の範囲において，2次方程式は常に2個，3次方程式は常に3個の解をもつ。

一般に，複素数の範囲において，「n 次方程式は n 個の解をもつ」ことが知られている。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

4

次の方程式を解け。

(1)　$x^3 + 27 = 0$　　(2)　$x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

(3)　$x^3 - 3x^2 - 8x - 4 = 0$　　(4)　$x^3 + 4x^2 - 3x - 18 = 0$

Point Pickup

高次方程式 $P(x) = 0$ の解法

公式や因数定理を用いて，$P(x)$を１次式または２次式の積の形に因数分解する。

特に断りがないときは，解は複素数の範囲で答える。

複２次式

$x^4 - 4x^2 + 3$ のように，４次式のうち，３次と１次の項がない式を

「複２次式」という。

複２次式の因数分解は，$x^2 = t$ とおきかえると，２次式の因数分解に帰着する。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第4講　確認テスト

1 $P(x) = x^3 - 3x^2 + x + 2$ を $x + 1$ で割った余りは [アイ] である。

2 $P(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$ とすると，$P(2) =$ [ウ] である。よって，因数定理より

$x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = (x - 2)(x^2 - x -$ [エ] $) = (x - 2)(x +$ [オ] $)(x -$ [カ] $)$ と

因数分解できる。

3 次の方程式を解け。

(1)　$x^3 + 8 = 0$　　$x =$ [キク]，[ケ] $\pm\sqrt{\text{[コ]}}\,i$

(2)　$x^4 + 3x^2 - 10 = 0$　　$x = \pm\sqrt{\text{[サ]}}$，$\pm\sqrt{\text{[シ]}}\,i$

(3)　$x^3 + x^2 - 3x + 1 = 0$　　$x =$ [ス]，[セソ] $\pm\sqrt{\text{[タ]}}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ Note }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第5講　点と直線

§1　2点間の距離

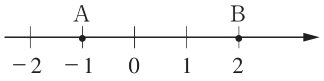
要点整理 と 公式

要点1　数直線上の2点間の距離

数直線上のある点Pに対応する実数 a を，

点Pの「座標」といい，「$\mathrm{P}(a)$」と表す。

（ex）右図で $\mathrm{A}(-1)$，$\mathrm{B}(2)$



2点 $\mathrm{A}(-1)$，$\mathrm{B}(2)$ 間の距離ABは，AB =　　　　　　　である。

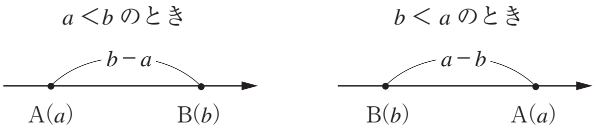
一般に，2点 $\mathrm{A}(a)$，$\mathrm{B}(b)$ の距離ABは

$a<b$ のとき　$\mathrm{AB}=b-a$

$a>b$ のとき　$\mathrm{AB}=a-b$

である。これらをまとめると

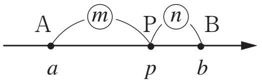
AB =　　　　　　と表される。



要点2　数直線上の内分点・外分点の座標

数直線上の点 $\mathrm{A}(a)$，$\mathrm{B}(b)$ に関して，線分ABを $m:n$ に内分する点 $\mathrm{P}(p)$ を，

線分ABの「内分点」という。



$a<b$ のとき，$a<p<b$ より

AP =　　　　，BP =

$\mathrm{AP}:\mathrm{PB}=m:n$ より

$(p-a):(b-p)=m:n$　　　　$m(b-p)=n(p-a)$

$(m+n)p=na+mb$　　よって　$p=\dfrac{na+mb}{m+n}$

$a>b$ のとき，同様に $p=\dfrac{na+mb}{m+n}$ が導かれる。

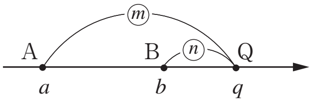
とくに $m=n$，つまり $m:n=1:1$ のとき，点Pは線分ABの「中点」となり，

その座標は　$p=\dfrac{1\cdot a+1\cdot b}{1+1}=\dfrac{a+b}{2}$ と表される。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

数直線上の点 A(a)，B(b)に関して，線分 AB を $m : n$ に外分する点Q(q)を，線分 AB の「外分点」という。

$m > n$ のとき



$m > n$ のときを考える

$a < b$ のとき，$a < b < q$

AQ = 　　　，　BQ =

AQ : QB = $m : n$ より

$(q-a) : (q-b) = m : n$　　　$n(q-a) = m(q-b)$

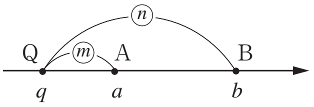
$(m-n)q = mb - na$　　　よって　$q = \dfrac{-na+mb}{m-n}$

$a > b$ のとき，同様に $q = \dfrac{-na+mb}{m-n}$ が導かれる。

また，$m < n$ のときも，$a < b$，$a > b$ に関わらず，

$q = \dfrac{-na+mb}{m-n}$ が導かれる。

$m < n$ のとき

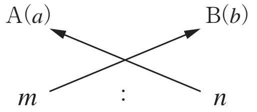


以上より，次のことがいえる。

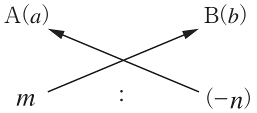
内分点・外分点の座標

数直線上の点 A(a)，B(b)に関して，

・線分 AB を $m : n$ に内分する点の座標は $\dfrac{na+mb}{m+n}$



・線分 AB を $m : n$ に外分する点の座標は $\dfrac{-na+mb}{m-n}$



(ex) A(3)，B(6)に関して

線分 AB を 2 : 1 に内分する点P の座標は

線分 AB を 5 : 2 に外分する点Q の座標は

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1

A(-3)，B(5)を結ぶ線分 AB について，次の点の座標を求めよ。

(1)　3：2 に内分する点　　(2)　中点

(3)　7：3 に外分する点　　(4)　1：4 に外分する点

Point Pickup

数直線上の２点間の距離，内分点・外分点の座標

数直線上の 2 点 A(a)，B(b)について

2 点 A，B 間の距離は　$AB=|b-a|$

線分 AB を　$m:n$ に内分する点の座標は $\dfrac{na+mb}{m+n}$

$m:n$ に外分する点の座標は $\dfrac{-na+mb}{m-n}=\dfrac{na-mb}{-m+n}$

外分点の式は，内分点の式の n を $-n$ に，または m を $-m$ におきかえたもの。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

｛解答｝

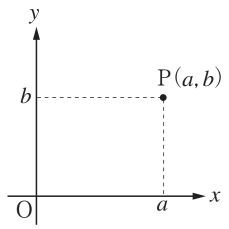
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§2 ▶ 座標平面上の点

要点整理 と 公式

要点3 座標平面と象限

「座標平面」… 座標軸（x 軸，y 軸）で定められた平面



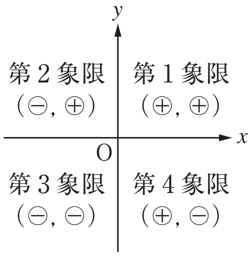
座標平面上の点Ｐの x 座標が a，y 座標が b のとき，点Ｐ の「座標」を$(a,\ b)$と表す。

また，座標が$(a,\ b)$である点ＰをＰ$(a,\ b)$ と表す。

座標平面は，座標軸によって右図のように「第１象限」「第２象限」「第３象限」「第４象限」という４つの「象限」に分けられる。

ただし，座標軸はどの象限にも含めない。

各象限ごとの x 座標，y 座標の符号は右図の通り。



要点4 座標平面上の２点間の距離

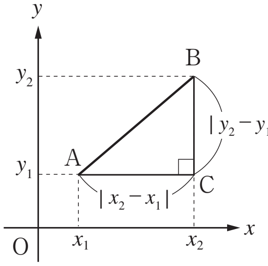
座標平面上の２点Ａ$(x_1,\ y_1)$，Ｂ$(x_2,\ y_2)$の距離を求める。

直線ABが座標軸に平行でないとき，

右図において三平方の定理より　$AB^2 = AC^2 + BC^2$

よって，$AB = \sqrt{AC^2+BC^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2+(y_2 - y_1)^2}$

この式は，直線ABが座標軸のいずれかに平行な場合も成り立つ。



■ **２点間の距離**

２点Ａ$(x_1,\ y_1)$，Ｂ$(x_2,\ y_2)$の距離は

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2+(y_2 - y_1)^2}$$

特に，原点ＯとＰ$(x,\ y)$の距離は $OP = \sqrt{x^2+y^2}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(ex) 2点 A(3, 2), B(1, −1)について

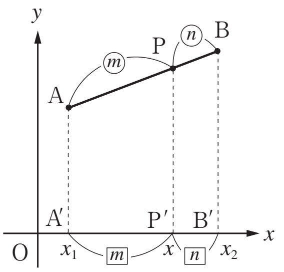
$$AB=\sqrt{(1-3)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$$

$$OB=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$$

要点5 座標平面上の内分点・外分点

$A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$ を結ぶ線分 AB を $m:n$ に内分する点を

$P(x,\ y)$とする。



A，B，P から x 軸に垂線 AA′，BB′，PP′ を下ろすと，

AP：PB = A′P′：P′B′ = $m:n$ である。よって

内分点の公式により $x=\dfrac{nx_1+mx_2}{m+n}$ である。

同様に，y 軸に垂線を下ろして考えると，$y=\dfrac{ny_1+my_2}{m+n}$ である。

外分点についても同様に考えることができる。

よって，以下のことがいえる。

■ 内分点・外分点の座標

2点 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$ について

線分 AB を $m:n$ に内分する点の座標は $\left(\dfrac{nx_1+mx_2}{m+n},\ \dfrac{ny_1+my_2}{m+n}\right)$

線分 AB を $m:n$ に外分する点の座標は $\left(\dfrac{-nx_1+mx_2}{m-n},\ \dfrac{-ny_1+my_2}{m-n}\right)$

とくに，線分 AB の中点の座標は $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\ \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2

A(2,　−2)，B(5,　4)，C(−1,　3) について，次のものを求めよ。

(1)　線分 AB の長さ　　(2)　線分 AB を 2：1 に内分する点の座標

(3)　線分 AB を1：3 に外分する点の座標　(4)　△ABC の重心の座標

Point Pickup

座標平面上の2 点間の距離，内分点・外分点の座標

数直線上の 2 点 A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$について

2 点 A，B 間の距離は　$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

線分 AB を　$m:n$ に内分する点の座標は $\left(\dfrac{nx_1+mx_2}{m+n},\ \dfrac{ny_1+my_2}{m+n}\right)$

$m:n$ に外分する点の座標は $\left(\dfrac{-nx_1+mx_2}{m-n},\ \dfrac{-ny_1+my_2}{m-n}\right)$

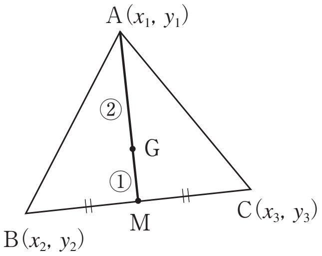
三角形の重心の座標

A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$，C$(x_3,\ y_3)$ について

△ABC の重心 G の座標は $\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

三角形の重心は，中線(頂点とその対辺の中点を結ぶ線分)を 2：1 に内分する点。

辺 BC の中点を M とすると，M$\left(\dfrac{x_2+x_3}{2},\ \dfrac{y_2+y_3}{2}\right)$



△ ABC の重心は，線分 AM を 2：1 に内分する点より

その x 座標は $\dfrac{1\cdot x_1+2\cdot\dfrac{x_2+x_3}{2}}{2+1}=\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}$　　y 座標も同様に求められる。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

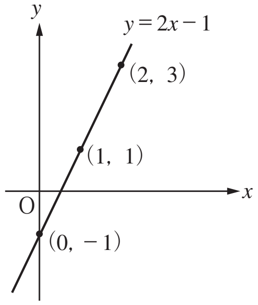
｛解答｝

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§3 ▶ 直線の方程式

要点整理 と 公式

要点 6 図形の方程式



1 次関数　$y = 2x - 1$ のグラフは，傾きが「　　」，
y 軸上の切片(「 y 切片」という)が「　　」の直線である。
この直線は，方程式 $y = 2x - 1$ を満たす点$(x,\ y)$をすべて集めてできる図形である。

　このように，x，y の方程式を成り立たせる点$(x,\ y)$全体からできる図形を，「方程式の表す図形」(方程式のグラフ)といい，その方程式を「図形の方程式」という。$y = 2x - 1$は「直線の方程式」である。

要点 7 直線の方程式

点 (1，2) を通り，傾きが 3 の直線の方程式を求める。

　傾きが 3 の直線の方程式は　$y = 3x + n$　…①　と表される。

　①が点(1，2)を通るので，　　$= 3\cdot\ \ + n$ …②

　①−②より $y -\ \ = 3(x -\ \ )$

　よって　$y = 3(x - 1) + 2$　つまり　$y = 3x - 1$

一般に次のことが成り立つ。

> ■ **直線の方程式①**
>
> 点 $(x_1,\ y_1)$を通り，傾きが m の直線の方程式は
>
> $y - y_1 = m(x - x_1)$

2 点(2，1)，(5，3)を通る直線の方程式を求める。

　この直線は，点(2，1) を通り，傾きは　　　　　　　であることより

その方程式は　$y - 1 = \dfrac{2}{3}(x - 2)$　つまり　$y = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{3}$　である。

一般に次のことが成り立つ。

> ■ **直線の方程式②**
>
> 異なる 2 点 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ を通る直線の方程式は
>
> $x_1 \neq x_2$のとき　$y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$
>
> $x_1 = x_2$のとき　$x = x_1$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

一般に，x，y の 1 次方程式 $ax + by + c = 0$ の表す図形は直線であり，
逆に，座標平面上のすべての直線は x，y の 1 次方程式 $ax + by + c = 0$ の形で表される。

（ex）$2x + 3y - 6 = 0 \iff y = -\dfrac{2}{3}x + 2$ … 傾き $-\dfrac{2}{3}$，y 切片 2 の直線

$y - 2 = 0 \iff y = 2$ … $(0,\ 2)$ を通り，　軸に平行な直線

$2x + 1 = 0 \iff x = -\dfrac{1}{2}$ … $\left(-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$ を通り，　軸に平行な直線

x，y の1 次方程式 $ax + by + c = 0$ の表す図形を，単に「直線 $ax + by + c = 0$」といい，
この方程式を「直線の方程式」という。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3

次の条件を満たす直線の方程式を求めよ。

(1)　点(2, 1) を通り，傾きが 3

(2)　点(4, 1) を通り，x 軸に平行

(3)　2 点(−1, 2)，(4, − 2)を通る

(4)　2 点(−3, 0)，(−3, 5)を通る

Point Pickup

直線の方程式

点 $(x_1,\ y_1)$を通り，傾きが m の直線

$$y - y_1 = m(x - x_1) \iff y = m(x - x_1) + y_1$$

異なる 2 点 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ を通る直線

$x_1 \neq x_2$ のとき　$y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \iff y = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$

$x_1 = x_2$ のとき　$x = x_1$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§4 ▶ 2直線の関係，点と直線の距離

要点整理 と 公式

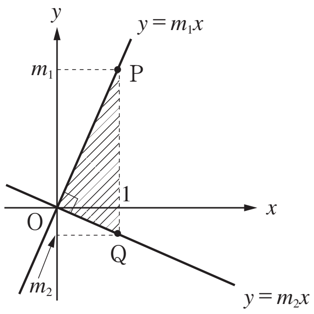
要点8　2直線の平行と垂直

2直線が平行ならばその傾きは等しく，逆に傾きが等しければその2直線は平行である。

ここでは，2直線が垂直になるときを考える。

2直線の方程式を $l : y = m_1x + n_1$，$m : y = m_2x + n_2$ とする。

l と m が垂直になるのは，それぞれの直線に平行で原点Oを通る直線 $y = m_1x$ と $y = m_2x$ が垂直になるときである。



$y = m_1x$ と $y = m_2x$ の上にそれぞれ P $(1,\ m_1)$，Q $(1,\ m_2)$をとる。

三平方の定理により $PQ^2 = OP^2 + OQ^2$

$(m_1 - m_2)^2 = (1 + m_1^2) + (1 + m_2^2)$　　　よって $m_1m_2 = -1$

したがって，2直線 l，m が垂直ならば，$m_1m_2 = -1$　が成り立つ。

逆に $m_1m_2 = -1$ ならば，2直線は垂直である。

一般に，次のことが成り立つ。

■ **2直線の平行と垂直**

2直線 $y = m_1x + n_1$，$y = m_2x + n_2$ において

2直線が平行 $\iff$ $m_1 = m_2$

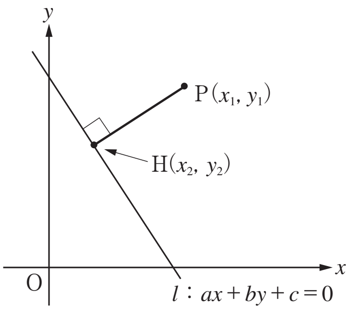
2直線が垂直 $\iff$ $m_1m_2 = -1$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

要点9 点と直線の距離

P $(x_1,\ y_1)$ から方程式 $ax+by+c=0$ で表される直線 l に下ろした垂線 PH の長さを求める。

H $(x_2,\ y_2)$ とすると，$\mathrm{PH}^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$ … ①



$a \neq 0$ かつ $b \neq 0$ のとき

l の傾きは $-\dfrac{a}{b}$ であるから，PH の傾きは $\dfrac{b}{a}$ である。

よって $\dfrac{b}{a}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$　　　$\dfrac{x_2-x_1}{a}=\dfrac{y_2-y_1}{b}$

したがって $\begin{cases} x_2-x_1=at \\ y_2-y_1=bt \end{cases}$ … ②（t は実数）とおける。

また，点 H は $ax+by+c=0$ 上にあるので $ax_2+by_2+c=0$

これと②より

$$a(x_1+at)+b(y_1+bt)+c=0$$

$$(a^2+b^2)t=-ax_1-by_1-c \qquad \text{よって}\quad t=-\frac{ax_1+by_1+c}{a^2+b^2} \quad \cdots ③$$

①，②，③より

$$\mathrm{PH}^2=(at)^2+(bt)^2=(a^2+b^2)t^2$$

$$=(a^2+b^2)\cdot\frac{(ax_1+by_1+c)^2}{(a^2+b^2)^2}=\frac{(ax_1+by_1+c)^2}{a^2+b^2}$$

したがって　$\mathrm{PH}=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

これは a，b いずれか一方が 0 のときも成り立つ。

以上より，次のことが成り立つ。

■ 点と直線の距離

P $(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

4

［1］　点(5，2)を通り，直線 $x+3y+1=0$ に平行な直線，垂直な直線の方程式をそれぞれ求めよ。

［2］　次の点と直線の距離を求めよ。

(1)　原点と直線 $3x+4y+5=0$　　(2)　(1，−3)と直線 $x-2y-13=0$

Point Pickup

２直線の平行・垂直

2 直線が平行 $\Longleftrightarrow$ 傾きが等しい

2 直線が垂直 $\Longleftrightarrow$ 傾きの積が −1

点と直線の距離

点 (x_1, y_1) と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は　$d=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

・直線の式の形を $ax+by+c=0$（一般形）の形にする。

・分母は直線の x，y の係数を用いる。

また，分子は直線の式に点の座標を代入したもの。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第5講　確認テスト

1　2点 A(1，−3)，B(4，3) について，線分 AB を 1：2 に内分する点の座標は

(ア ， イウ)，4：1 に外分する点の座標は (エ ， オ) である。

2　2点(6，−3)，(−4，3)を通る直線の傾きは$-\dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}$である。よって，この直線の方程式は

$y=-\dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}x+\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$である。

3　点(2，−3)を通り，直線 $4x-3y+1=0$ に平行な直線の傾きは$\dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}$である。

また，垂直な直線の方程式は $y=-\dfrac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}x-\dfrac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}$である。

4　点(5，−2)と直線 $3x-2y-6=0$ の距離は$\sqrt{\boxed{タチ}}$である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ Note }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第6講　円

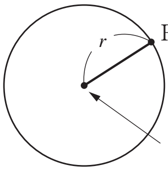
§1 ▶ 円の方程式

要点整理 と 公式

要点 1 円の方程式

中心 C，半径 r の円は，CP = r を満たす点 P 全体の集合である。

このことを用いて，円を表す方程式(円の方程式)を求める。



中心 C$(a,\ b)$，半径が r の円の円上の点を P $(x,\ y)$とすると

$$\mathrm{CP} = r \quad \text{かつ} \quad \mathrm{CP} = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \text{ より}$$

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$

両辺 2 乗すると，$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ が得られる。

これが，中心 C $(a,\ b)$，半径 r の円上の点が満たすべき方程式である。

■ 円の方程式

点$(a,\ b)$を中心とする半径が r の円の方程式は

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

とくに，原点を中心とする半径 r の円の方程式は　$x^2 + y^2 = r^2$

(ex)　$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$ は，中心が点　　　　　，半径が　　　　　の円を表す。

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ より　　$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$

ここで $-2a = l$，$-2b = m$，$a^2 + b^2 - r^2 = n$ とおくと

$$x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$$

と表される。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

逆にこの形で表された方程式を $(x-a)^2+(y-b)^2=k$ の形に変形したとき，

$k>0$ ならば 中心が点$(a,\ b)$，半径が$\sqrt{k}$ の円

$k=0$ ならば 点$(a,\ b)$

を表し，$k<0$ ならば，この方程式が表す図形はない。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1

［1］　次の条件を満たす円の方程式を求めよ。

（1）　中心が点（1，-1）で，半径が 2

（2）　中心が原点で，（3，-4）を通る

（3）　3 点（0，2），（6，0），（7，3）を通る

［2］　方程式 $x^2+y^2+4x-8y+17=0$ はどのような図形を表すか。

Point Pickup

円の方程式

点（a，b）中心　半径 r の円の方程式は　$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

原点中心　半径 r の円の方程式は　$x^2+y^2=r^2$

円の方程式の決定（通る3 点から）

求める円の方程式を $x^2+y^2+\quad x+\quad y+\quad=0$ とおき，通る点の座標を代入して

できた 3 つの方程式を「連立方程式」として解く。

方程式 $x^2+y^2+lx+my+n=0$ の表す図形

x，y それぞれについて「平方完成」し，$(x-a)^2+(y-b)^2=k$ の形にする。

「　　　　」ならば　中心（a，b），半径が $\sqrt{k}$ の円を表す。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§2 ▶ 円と直線の共有点の座標と個数

要点整理 と 公式

要点2 円と直線の共有点の座標

円と直線の共有点の座標は，円と直線の方程式を「連立」させて解くことによって求めることができる。

(ex) 円 $x^2+y^2=25$ と，直線 $y=x+1$ の共有点の座標を求める。

$x^2+y^2=25\cdots$ ①，　$y=x+1\cdots$ ②　とする。

②を①に代入して $x^2+(x+1)^2=25$

$2x^2+2x-24=0$　　$x^2+x-12=0$

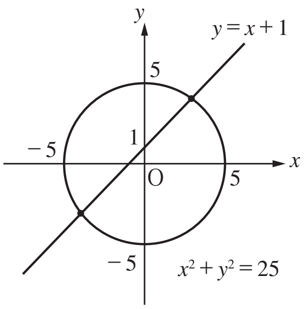
$(x-3)(x+4)=0$　　よって $x=3,\ -4$

このとき「　　」より

$x=3$ のとき　$y=4$

$x=-4$ のとき $y=-3$

よって，共有点の座標は $(3,\ 4)$，$(-4,\ -3)$



要点3 円と直線の共有点の個数

円の方程式と直線の方程式を連立させ，y を消去して得られる x の 2 次方程式

$ax^2+bx+c=0\cdots$ ①

について，その「　　　　」が共有点の x 座標となる。

よって，①の実数解の個数が，共有点の個数となる。

この方程式の判別式を $D=b^2-4ac$ とすると，共有点の個数は以下のようになる。

■ **円と直線の共有点の個数**

円と直線の方程式を連立させ，1 つの文字を消去して得られる 2 次方程式の判別式をDとすると

$D>0 \iff$ 円と直線の共有点 2 個

$D=0 \iff$ 円と直線の共有点 1 個

$D<0 \iff$ 円と直線の共有点 0 個(共有点なし)

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ メモ }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2

次の円と直線の共有点の個数を求めよ。また，共有点がある場合はその座標を求めよ。

(1)　$x^2+y^2=5$，$y=2x-5$

(2)　$x^2+y^2=2$，$y=-2x+1$

(3)　$x^2+y^2=8$，$y=x+6$

Point Pickup

円と直線の共有点

円 C と直線 l の共有点の座標

$\Longrightarrow$　直線 l の式を $y=mx+n$ の形にし，円 C の式に代入して y を消去

得られる2次方程式 $ax^2+bx+c=0\cdots$① の「実数解」が，

円と直線の共有点の x 座標。

この実数解を，「直線 l 」の式に代入し，共有点の y 座標を求める。

2次方程式①の判別式を $D=b^2-4ac$ とすると

$D>0$　$\Longleftrightarrow$　共有点2個

$D=0$　$\Longleftrightarrow$　共有点1個

$D<0$　$\Longleftrightarrow$　共有点0個(共有点なし)

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§3 ▶ 円と直線の位置関係

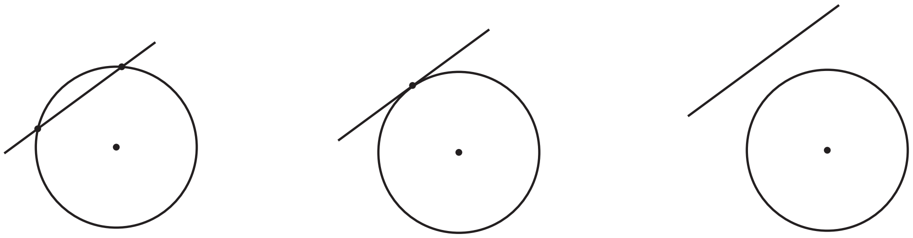
要点整理 と 公式

要点 4 円と直線の位置関係

円と直線の共有点の個数は，円と直線の方程式から y を消去して得られる 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の判別式 D の符号によって求めることができる。

この D の符号と共有点の個数，円と直線の位置関係は以下のようになる。

「$D > 0$」 共有点 2 個　　「$D = 0$」 共有点 1 個　　「$D < 0$」 共有点 0 個

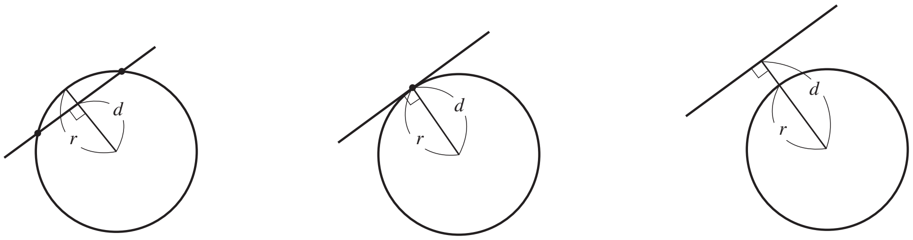


「異なる 2 点で交わる」　　「 接する 」　　「共有点をもたない」

要点 5 円と直線の位置関係（点と直線の距離から）

円と直線の位置関係について，円の中心と直線との距離を d，円の半径を r とすると，d と r の大小により以下のようになる。

「　　　」　　「　　　」　　「　　　」



「異なる2 点で交わる」　　「 接する 」　　「共有点をもたない」

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

（ex）円 $x^2+y^2=25$ と直線 $y=-x+1$ について

円の中心 $(0,\ 0)$ と直線 $x+y-1=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|1\cdot0+1\cdot0-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|-1|}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

円の半径 r は $r=5$

よって $d<r$ より，この円と直線は異なる２点で交わる。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3

円 $C : x^2 + y^2 = 5$ と直線 $l : y = x + k$ について，次の問いに答えよ。

(1)　円 C と直線 l が異なる2点で交わるとき，定数 k の値の範囲を求めよ。

(2)　円 C と直線 l が接するとき，定数 k の値を求めよ。

Point Pickup

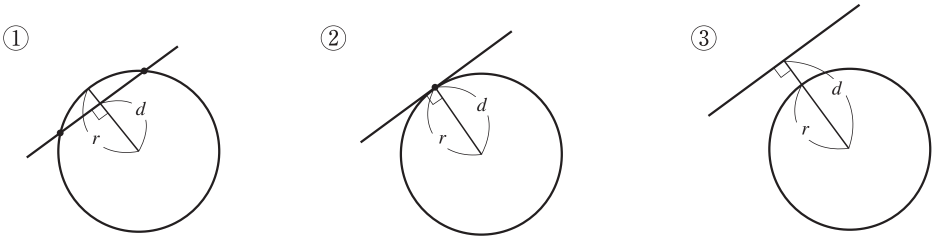
円と直線の位置関係

円と直線を連立して得られる2次方程式の判別式を D とすると

①　異なる2点で交わる　$\Longleftrightarrow$　$D > 0$
②　接する　$\Longleftrightarrow$　$D = 0$
（①②）共有点をもつ　$\Longleftrightarrow$　$D \geqq 0$
③　共有点をもたない　$\Longleftrightarrow$　$D < 0$

円の中心と直線の距離を d，円の半径を r とすると

①　異なる2点で交わる　$\Longleftrightarrow$　$d < r$
②　接する　$\Longleftrightarrow$　$d = r$
（①②）共有点をもつ　$\Longleftrightarrow$　$d \leqq r$
③　共有点をもたない　$\Longleftrightarrow$　$d > r$



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

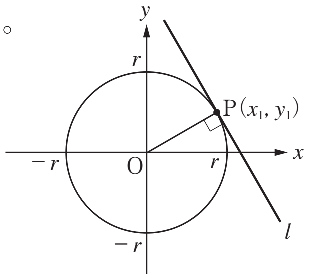
ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§4 ▶ 円の接線

要点整理 と 公式

要点6 円の接線の方程式

円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 P $(x_1,\ y_1)$ における接線 l の方程式を求める。

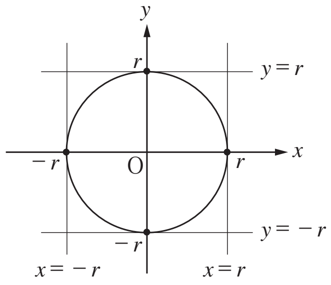


点 P が座標軸上にないとき，直線 OP の傾きは $\dfrac{y_1}{x_1}$ である。

OP⊥ l であることから，接線 l の方程式は

$$y=-\frac{x_1}{y_1}(x-x_1)+y_1 \qquad \text{すなわち} \quad x_1x+y_1y={x_1}^2+{y_1}^2$$

P $(x_1,\ y_1)$ は円上の点であることより　${x_1}^2+{y_1}^2=r^2$



よって 接線 l の方程式は $x_1x+y_1y=r^2$ である。

この式は，点 P が座標軸上にある場合も成り立つ。

■ 円上の点における接線の方程式

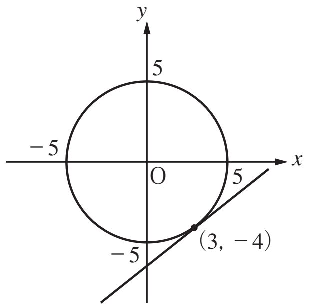
円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は

$$x_1x+y_1y=r^2$$

(ex) 円 $x^2+y^2=25$ 上の点 $(3,\ -4)$ における接線の方程式は

$$x+\qquad y=25$$

つまり $3x-4y=25$



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ メモ }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

4

(1)　円 $x^2+y^2=5$ 上の点 P $(2,\ 1)$ における接線の方程式を求めよ。

(2)　点 A$(3,\ 1)$ から円 $x^2+y^2=5$ に引いた接線の方程式と接点の座標を求めよ。

Point Pickup

円上の点における接線の方程式

円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は　$x_1x+y_1y=r^2$

円外の点から引いた接線の方程式

①　接点の座標を$(a,\ b)$とおき，点$(a,\ b)$における接線の方程式を求める。
接線が満たすべき条件を反映させ，a と b の関係式を作る。

②　点$(a,\ b)$は円上の点であることから，円の方程式に代入すると，
a と b の関係式が得られる。

③　①と②を連立させ，a と b を求める。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

｛解答｝

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第6講　確認テスト

1　中心が点(2, 3)，半径が２の円の方程式は $(x-$ ア $)^2+(y-$ イ $)^2=$ ウ である。
また，方程式 $x^2+y^2-4x-6y-12=0$ は中心が点(エ ， オ)，半径 カ の円を表す。

2　円 $x^2+y^2=5$ と 直線 $y=x-1$ の共有点の座標は (キ ， ク)，(− ケ ， − コ) である。

3　(1)　円 $x^2+y^2=25$ 上の点(4，3)における接線の方程式は サ $x+$ シ $y=25$ である。

(2)　点(1，5)から円 $x^2+y^2=13$ に引いた接線の方程式は ス $x+$ セ $y=13$ と − ソ $x+$ タ $y=13$ である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ Note }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第7講　軌跡と領域

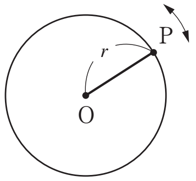
§1　軌跡の方程式

要点整理 と 公式

要点1　軌跡

「軌跡」… 与えられた条件を満たす点が動いてできる点の集合(図形)を，

その条件を満たす点の「軌跡」という。



(ex) 平面上で定点 O から一定の距離 r にある点 P の「軌跡」は，

「O を中心とする半径 r の円」である。

要点2　2点から等距離にある点の軌跡

与えられた条件を満たす点の軌跡を，座標を用いて求めることを考える。

(ex) 2点 A(0, 3)，B(3, 0)について，条件 AP = BP を満たす点 P の軌跡を求める。

点 P の座標を$(x,\ y)$とする。

$$\mathrm{AP}=\sqrt{(x-0)^2+(y-3)^2}=\sqrt{x^2+(y-3)^2}$$

$$\mathrm{BP}=\sqrt{(x-3)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x-3)^2+y^2}$$

条件 AP = BP より $\mathrm{AP}^2=\mathrm{BP}^2$

つまり $x^2+(y-3)^2=(x-3)^2+y^2$

展開して整理すると $y=x$

よって，点 P は 直線 $y=x$ 上にある。

逆に，直線 $y=x$ 上のすべての点は，条件 AP = BP を満たす。

したがって，求める点 P の軌跡は　直線 $y=x$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

座標を用いて軌跡を求める手順は以下。

■ 軌跡を求める手順

① 条件を満たす点を$(x,\ y)$などで表し，与えられた条件を$x,\ y$の方程式で表す。

② 表した方程式の形から，その方程式が表す図形を求める。

③ ②の図形上のすべての点が，与えられた条件を満たすことを確かめる。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1

2点A(2，5)，B(6，3)から等距離にある点Pの軌跡を求めよ。

Point Pickup

点Pの軌跡の求め方

① 点Pの座標を（x，y）とする。

② 点Pに関する条件から，x，yの方程式を立てる。

③ ②の式を整理し，方程式が表す図形を求める。

④ 逆の確認をする。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

｛解答｝

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§2 ▶ いろいろな軌跡

要点整理 と 公式

要点❸ 2 点からの距離の比が一定な点の軌跡

2 点 A $(1,\ 1)$, B $(4,\ 7)$ からの距離の比が $1:2$ である点 P の軌跡を求める。

点 P の座標を $(x,\ y)$ とする。

点 P の満たす条件は $AP:BP=1:2$

つまり $BP=2AP$ より $BP^2=4AP^2$

よって $(x-4)^2+(y-7)^2=4\{(x-1)^2+(y-1)^2\}$

$$x^2-8x+16+y^2-14y+49=4(x^2-2x+1+y^2-2y+1)$$

$$3x^2+3y^2+6y-57=0$$

$$x^2+y^2+2y-19=0$$

$$x^2+(y+1)^2=20$$

ゆえに，点 P は円 $x^2+(y+1)^2=20$ 上にある。

逆に，この円上のすべての点は条件を満たす。

したがって，求める点 P の軌跡は

中心 $(0,\ -1)$，半径 $2\sqrt{5}$ の円 である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ メモ }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2

2点 A(4, 0), B(−2, 0)について，次の条件を満たす点の軌跡を求めよ。

(1)　$AP^2 + BP^2 = 20$ を満たす点 P

(2)　AQ：BQ = 2：1 を満たす点 Q

Point Pickup

軌跡が「円」となるときの答え方

条件を満たす点の軌跡が「円」になる場合，その答え方として

・中心の座標と半径

・方程式

のいずれの答え方でもよい。図形名「円」を忘れないこと。

(ex) 軌跡を表す方程式が $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$ のとき，その軌跡の答え方は

・中心 (1, 2)，半径 3 の円

・円 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$

のいずれでもよい。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§3 ▶ 不等式の表す領域

要点整理 と 公式

要点 4 直線を境界とする領域

「領域」… x，y に関する不等式があるとき，それをみたす点 $(x,\ y)$ 全体の集合を，
その不等式の表す「領域」という。

不等式 $y > x - 1$ の表す領域について考える。

点 P $(x_1,\ y_1)$ がこの領域にあれば，

$y_1 > x_1 - 1$ … ①

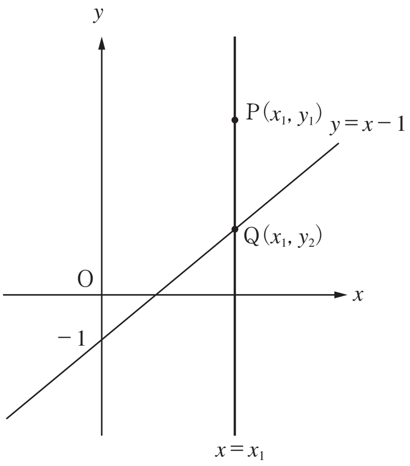
が成り立つ。

また，点 P を通り y 軸に平行な直線 $x = x_1$ と

$y = x - 1$ との交点を Q $(x_1,\ y_2)$ とすると

$y_2 = x_1 - 1$ … ②

である。



①，②より $y_1 > y_2$ である。

よって，点 P は点 Q より「　　　」にあり，

すべての x_1 に関してこれは成立する。

したがって，点 P は直線 $y = x - 1$ より上側にある。

よって，$y > x - 1$ の表す領域は，直線 $y = x - 1$ より上側である。

同様に，$y < x - 1$ の表す領域は，直線 $y = x - 1$ より下側である。

一般に，直線で分けられた領域について，次のことがいえる。

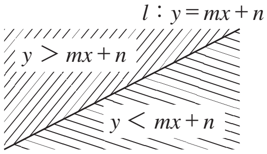
■ 直線を境界とする領域

直線 $y = mx + n$ を l とすると

不等式 $y > mx + n$ の表す領域は 直線 l の上側

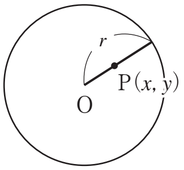
不等式 $y < mx + n$ の表す領域は 直線 l の下側

いずれも，境界線 $y = mx + n$ は含まない。



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

要点5 円を境界とする領域



不等式 $x^2 + y^2 < r^2$ の表す領域について考える。

この領域に含まれる点を P $(x,\ y)$とすると，

原点から P までの距離 OP について

$OP = \sqrt{x^2 + y^2}$ つまり $OP^2 = x^2 + y^2$ が成り立つ。

よって，$OP^2 < r^2$ つまり $OP < r$ が成り立つ。

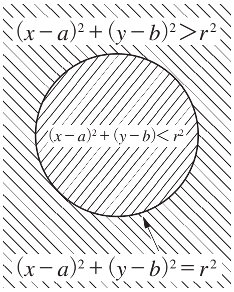
これは点 P が，原点中心，半径 r の円 $x^2 + y^2 = r^2$ の内部にあることを示している。

よって，$x^2 + y^2 < r^2$ の表す領域は，円 $x^2 + y^2 = r^2$ の内部である。

同様に，$x^2 + y^2 > r^2$ の表す領域は，円 $x^2 + y^2 = r^2$ の外部である。

一般に，次のことがいえる。

■ 円を境界とする領域



円 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ を C とすると

　不等式 $(x - a)^2 + (y - b)^2 < r^2$ の表す領域は 円 C の内部

　不等式 $(x - a)^2 + (y - b)^2 > r^2$ の表す領域は 円 C の外部

いずれも，境界線 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ は含まない。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3

次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1)　$y > 2x + 1$　　(2)　$y \leqq -\dfrac{1}{3}x + 1$

(3)　$x \geqq 1$　　(4)　$y - 2 < 0$

(5)　$x^2 + y^2 < 9$　　(6)　$(x-1)^2 + (y-2)^2 \geqq 2$

Point Pickup

直線を境界とする領域とその図示

不等式　$y > mx + n$ …　直線 $y = mx + n$ の「上側」

不等式　$y < mx + n$ …　直線 $y = mx + n$ の「下側」

不等式　$(x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2$ … 円 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ の「内部」

不等式　$(x-a)^2 + (y-b)^2 > r^2$ … 円 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ の「外部」

いずれも境界線　$y = mx + n$ や　$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ は「含まない」。

不等号が「≧」や「≦」となっている場合は，境界線を「含む」。

不等式を表す領域を図示する方法

①　境界線(直線など)を図示する。必要に応じて「切片」を記入するとよい。

②　不等式の表す部分に斜線を入れる。

③　境界線を含むか含まないかを明記する。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§4 ▶ 連立不等式の表す領域

要点整理 と 公式

要点 6 連立不等式の表す領域

x, y についての連立不等式の表す領域は，それぞれの不等式を「同時に」満たす点$(x,\ y)$の集合であり，それぞれの不等式が表す領域の「共通部分」である。

(ex) 連立不等式

$$\begin{cases} x+y<2 \cdots ① \\ 2x-y<1 \cdots ② \end{cases}$$

の表す領域を図示する。

①を変形すると $y<-x+2$ より，①の表す領域は

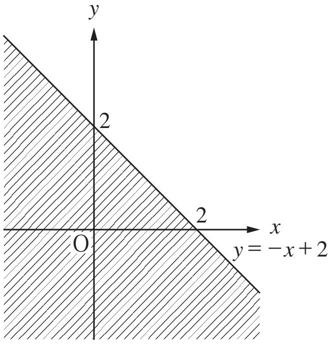
直線 $y=-x+2$ の「　　側」である。

②を変形すると $y>2x-1$ より，②の表す領域は

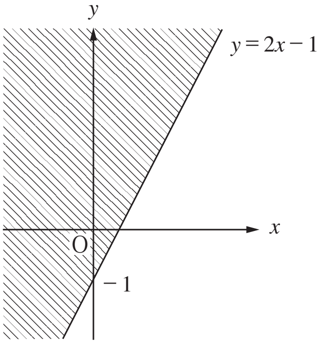
直線 $y=2x-1$ の「　　側」である。

求める領域は，これら2つの領域の共通部分である。

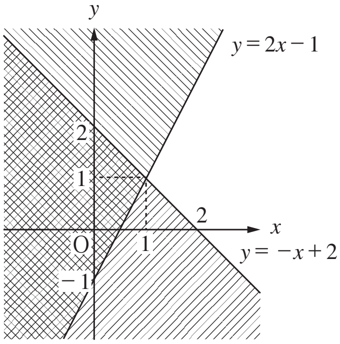
①の表す領域



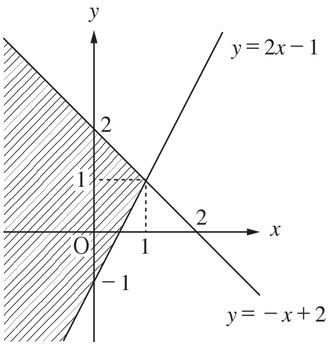
②の表す領域



①と②の共通部分



よって，求める領域は下図斜線部分。境界線は含まない。



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ メモ }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

4

次の連立不等式の表す領域を図示せよ。

(1) $\begin{cases} x + y - 3 > 0 \\ x - y - 3 < 0 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqq 9 \\ y \leqq x + 3 \end{cases}$

Point Pickup

連立不等式の表す領域

⟹　それぞれの不等式の表す領域の共通部分を図示する。手順は以下。

①　それぞれの不等式の「境界線」を求め，図示する。

②　①の境界線に「共有点」があれば，それを求める。

③　それぞれの不等式の表す領域を考え，その「共通部分」に斜線を入れる。

④　境界線を含むか含まないかを明記する。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第7講　確認テスト

1　2点 A(1, 0), B(0, 2)から等しい距離にある点 P の軌跡は 直線 [ア] x − [イ] y +3 = 0 である。

2　2 点 A (5, 0), B(−1, 0)からの距離の比が 2 : 1 である点 P の軌跡は, 中心([ウエ] , [オ]), 半径 [カ] の円である。

3　次の [　　] に当てはまるものを, 下の①～⑥から選べ。ただし同じものを選んでもよい。

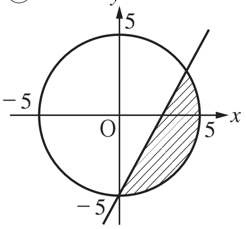
(1)　不等式 $y > x + 1$ の表す領域は, 直線 $y = x + 1$ の [キ] である。
ただし境界線を [ク] 。

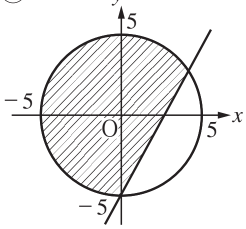
(2)　不等式 $x^2 + y^2 \leqq 4$ の表す領域は, 円 $x^2 + y^2 = 4$ の [ケ] である。
ただし境界線を [コ] 。

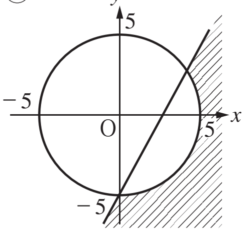
①　上側　　②　下側　　③　内部　　④　外部　　⑤　含む　　⑥　含まない

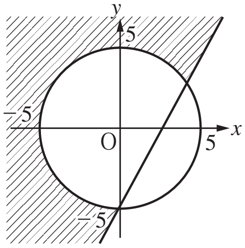
4　連立不等式 $\begin{cases} 2x - y > 5 \\ x^2 + y^2 < 25 \end{cases}$ の満たす領域は [サ] である。

[サ] に当てはまるものを, 下の①～④から選べ。

①


②


③


④


©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ Note }

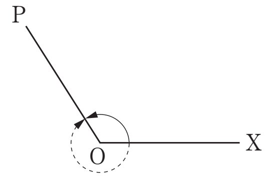
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第8講　三角関数とその性質

§1　動径と一般角

要点整理 と 公式

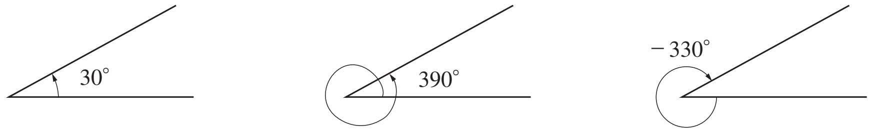
要点 1 動径と一般角



右の図のような半直線 OX，OP を考える。
半直線 OP が点 O を中心とし，OX の位置から回転したものと考えるとき，この半直線 OP を「動径」といい，動径の始めの位置を表す半直線 OX を「始線」という。

動径の回転には，2 つの向きがある。
反時計回りを「　　の向き」といい，この向きの角を「　　の角」という。
時計回りを 「　　の向き」といい，この向きの角を「　　の角」という。
負の角は，マイナスの符号をつけて表す。

また，回転の大きさについては 1 回転以上，つまり 360° 以上の場合も考える。
このように，回転の向きと大きさで表す角を「一般角」という。



上の図は，すべて同じ位置を表す動径である。つまり，動径の表し方は 1 通りではない。
一般に，動径 OP の表す 1 つの角を α とすると，動径 OP の表す角 θ は

$$\theta = \alpha + 360^\circ \times n \qquad (n \text{ は整数})$$

と表される。
上の図において　$390^\circ = 30^\circ + 360^\circ$　　，$-330^\circ = 30^\circ + 360^\circ \times$　　　である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ メモ }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1

次の角の動径 OP を座標平面上に図示せよ。また，60° の動径と同じ位置にあるものはどれか。

(1)　225°　　(2)　420°

(3)　−60°　　(4)　870°

Point Pickup

動径の図示

⟹　回転の向きと，その向きにおける回転数を考える。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§2 ▶ 弧度法

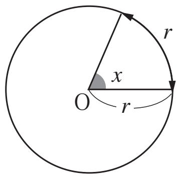
要点整理 と 公式

要点❷ 弧度法

角の大きさを表すのに，これまでは「度(°)」を単位とする「度数法」というのを用いてきた。ここでは別の表し方について学んでいく。

半径 r の円において，この半径と同じ長さ r の弧に対する中心角の大きさを $x°$ とすると，

$2\pi r \times \dfrac{x}{360} = r$ より $x = \left(\dfrac{180}{\pi}\right)^{\circ}$ である。



この結果は半径 r によらず一定である。

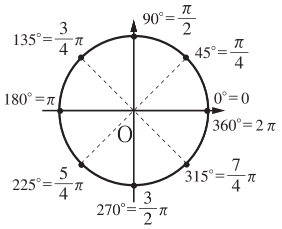
この x の大きさを「1　　　　」(1弧度)という。

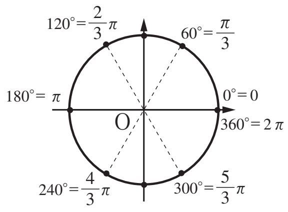
つまり，1ラジアン ＝ 　　　　である。1ラジアンはおよそ 57.3° である。

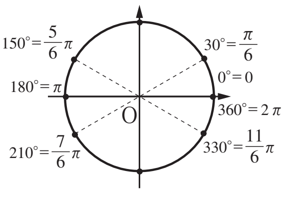
また，π ラジアン ＝ 180°　であり，$1° = \dfrac{\pi}{180}$ ラジアンである。

ラジアンを単位とする角の表し方を「弧度法」という。弧度法では，普通，ラジアンを省略して表す。

つまり，　π ＝ 180°　であり，$1° = \dfrac{\pi}{180}$　である。

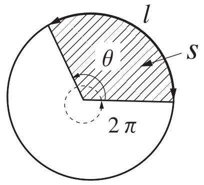






©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

要点３ 扇形の弧の長さと面積



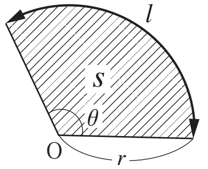
半径 r の円の円周の長さは $2\pi r$，円の面積は πr^2 である。

その一部である半径 r，中心角 θ の扇形について，

弧の長さ l，面積 S はその中心角に比例するから

$$l = 2\pi r \times \frac{\theta}{2\pi} = r\theta, \qquad S = \pi r^2 \times \frac{\theta}{2\pi} = \frac{1}{2} r^2 \theta$$

■ 扇形の弧の長さと面積



半径 r，中心角 θ の扇形の弧の長さを l，面積を S とすると

$$l = r\theta, \qquad S = \frac{1}{2} r^2 \theta = \frac{1}{2} lr$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2

［1］次の角を弧度法で表せ。

(1)　30°　　(2)　495°　　(3)　-120°

［2］次の角を度数法で表せ。

(1)　$\dfrac{5}{12}\pi$　　(2)　$-\dfrac{2}{3}\pi$　　(3)　$\dfrac{3}{2}\pi$

［3］半径 6 cm，中心角 $\dfrac{3}{5}\pi$ の扇形の弧の長さ l と面積 S を求めよ。

Point Pickup

弧度法と度数法

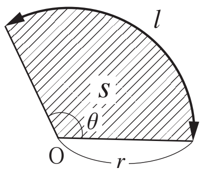
弧度法 → 度数法　　$\pi = 180^\circ$

度数法 → 弧度法　　$1^\circ = \dfrac{\pi}{180}$　　$x^\circ = \dfrac{\pi}{180} \times x$

扇形の弧の長さと面積

半径 r，中心角 θ の扇形の弧の長さを l，面積を S とすると

$$l = r\theta,\qquad S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}lr$$



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§3 ▶ 三角関数

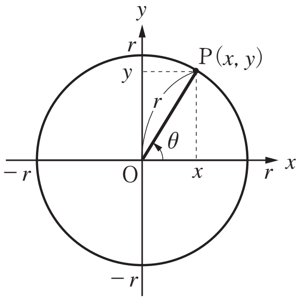
要点整理 と 公式

要点4 三角関数

ここでは数学Ⅰで学んだ三角比 $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ を，θ が一般角の場合において定義する。

以下，角度は弧度法で表す。

右図のように，原点中心，半径 r の円において，
x 軸の正の部分を始線とする一般角 θ の「動径」と，
円との交点を $P(x,\ y)$ とすると，



比 $\dfrac{y}{r}$, $\dfrac{x}{r}$, $\dfrac{y}{x}$ の値

は，円 O の半径 r に関係なく，角 θ だけによって定まる。

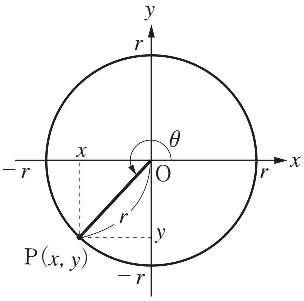
このことより，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ を「θ の　　　」として以下のように定義する。

■ 三角関数

$$\sin\theta = \frac{y}{r}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$



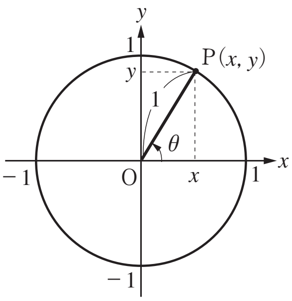
$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値をそれぞれ一般角 θ の「　　　」「　　　」「　　　」といい，

$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ をまとめて，一般角 θ の「　　　」という。

※ $\theta = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$　（n は整数）に関しては，$\tan\theta$ は定義しない。

要点5 三角関数と単位円

右図のように「単位円」(原点中心，半径 1 の円)において，
x 軸の正の部分を始線とする一般角 θ の「動径」と，
円との交点を $P(x,\ y)$ とすると



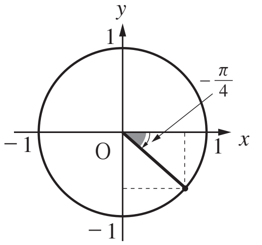
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

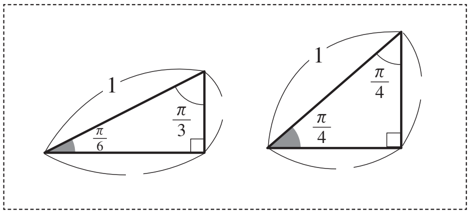
$$\sin\theta = \frac{y}{1} = y,\quad \cos\theta = \frac{x}{1} = x$$

つまり，$\sin\theta$ の値は点 P の「　　座標」，$\cos\theta$ の値は点 P の「　　座標」と一致する。

また，$-1 \leqq y \leqq 1$，$-1 \leqq x \leqq 1$ より，$-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$，$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$ であることがわかる。

（ex）$\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$，$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ の値を単位円で考える。



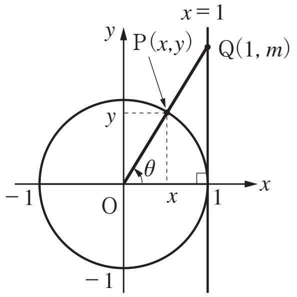


$$\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \qquad ,\quad \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) =$$

右図の単位円において，x 軸の正の部分を始線とする。

一般角 θ の動径と，直線「$x = 1$」との交点をQ$(1,\ m)$とすると，

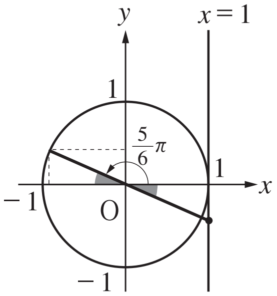
$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{m}{1} = m$$

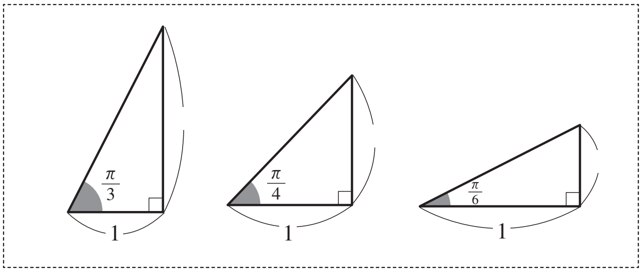


つまり，$\tan\theta$ の値は点 Q の y 座標と一致する。

点 Q は直線 $x = 1$ 上のすべての点を動くので, $\tan\theta$ の値の範囲は「すべての実数」である。

（ex）$\tan\frac{5}{6}\pi$ 　の値を単位円で考える。





$$\tan\frac{5}{6}\pi =$$

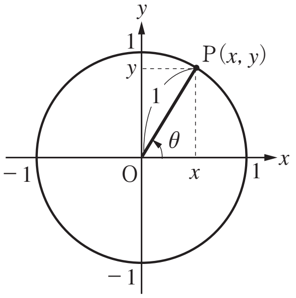
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3

次の角 θ について，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(1)　$\theta = \dfrac{4}{3}\pi$　　(2)　$\theta = \dfrac{11}{6}\pi$　　(3)　$\theta = -\dfrac{7}{4}\pi$　　(4)　$\theta = \dfrac{3}{2}\pi$

Point Pickup



単位円を用いた三角関数の値($\sin\theta$，$\cos\theta$)

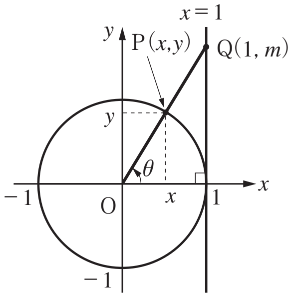
単位円の円周上の点の座標をP(x，y)とすると

$\sin\theta$ ＝　　，$\cos\theta$ ＝

P の座標で出てくる 3 つの値　　　，　　　，　　　が

どのような角度の$\sin\theta$，$\cos\theta$ のときに出てくるのかを覚えておくとよい。

単位円を用いた三角関数の値 ($\tan\theta$)



単位円の円周上の点を点 P(x，y)，直線 OP と

直線 x ＝ 1 の交点の座標を Q (1，m)とすると

$\tan\ \theta$ ＝

Q の y 座標で出てくる 3 つの値　　　，　　　，　　　が

どのような角度の $\tan\theta$ のときに出てくるのかを覚えておくとよい。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

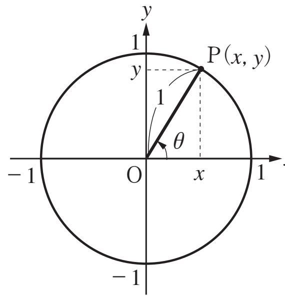
｛解答｝

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§4 ▶ 三角関数の相互関係，三角関数の性質

要点整理 と 公式

要点6 三角関数の相互関係



単位円の円周上の点 P $(x,\ y)$について，

$\cos\theta = x,\ \sin\theta = y$　…①

$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$　…②　　である。

②の $x,\ y$ に①を代入して，$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ が成り立つ。

また，点 P $(x,\ y)$は単位円上にあるので，$x^2 + y^2 = 1$　…③

③の $x,\ y$ に①を代入して，　$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$　が成り立つ。

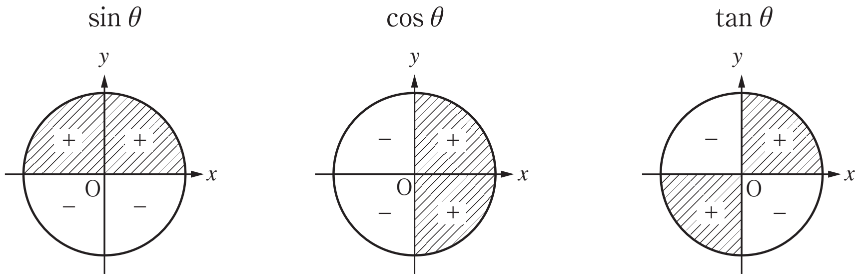
$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$，$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ から，$1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ が成り立つ。

よって，以下のことが成り立つ。

■ 三角関数の相互関係

①　$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$　　②　$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$　　③　$1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値の符号は，θ の動径がどの象限にあるかで決定する。



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

要点7 三角関数の性質

三角関数の性質より，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき以下が成り立つ。

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta,\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta,\quad \tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{1}{\tan\theta}$$

$$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta,\quad \cos(\pi-\theta)=-\cos\theta,\quad \tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$$

n を整数とするとき，角 $\theta+2\pi\times n$ の動径は角 θ の動径と一致する。

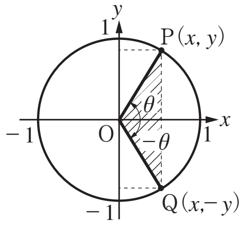
よって，次のことが成り立つ。

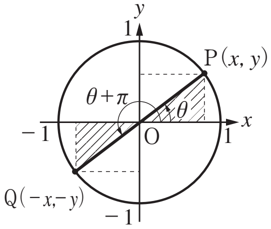
■ $\theta+2n\pi$ の三角関数

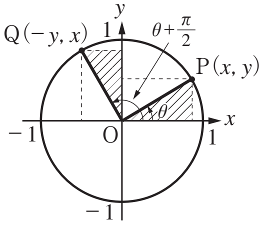
$$\sin(\theta+2n\pi)=\sin\theta\qquad \cos(\theta+2n\pi)=\cos\theta\qquad \tan(\theta+2n\pi)=\tan\theta$$

また，下図①，②，③より，次のことが成り立つ。

①　②　③







■ $-\theta$，$\theta+\pi$，$\theta+\frac{\pi}{2}$ の三角関数

① $\sin(-\theta)=-\sin\theta$，$\cos(-\theta)=\cos\theta$，$\tan(-\theta)=-\tan\theta$

② $\sin(\theta+\pi)=-\sin\theta$，$\cos(\theta+\pi)=-\cos\theta$，$\tan(\theta+\pi)=\tan\theta$

③ $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\theta$，$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\theta$，$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{\tan\theta}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

4

(1)　θ が第４象限の角で，$\cos\theta = \dfrac{3}{5}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(2)　θ が第３象限の角で，$\tan\theta = 3$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めよ。

Point Pickup

三角関数の相互関係

①　$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$　　②　$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$　　③　$1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

θ の動径がどの「象限」にあるかで，三角関数の符号が決定する。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第8講　確認テスト

1　次の①〜④の角のうち，30° の動径と同じ位置にあるものは［ア］である。

①　150°　　②　−30°　　③　750°　　④　380°

2　(1)　120° の角を弧度法で表すと $\dfrac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}\pi$ である。

また，$\dfrac{5}{4}\pi$ を度数法で表すと［エオカ］°である。

(2)　半径 3 cm，中心角 $\dfrac{4}{9}\pi$ の扇形の弧の長さは $\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}\pi$ cm，面積は［ケ］π cm² である。

3　次の［　］にあてはまるものを，下の①〜⑥からそれぞれ選べ。

(1)　$\theta = \dfrac{7}{6}\pi$ のとき　$\sin\theta =$［コ］，$\cos\theta =$［サ］

①　$\dfrac{1}{2}$　　②　$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　③　$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　④　$-\dfrac{1}{2}$　　⑤　$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　⑥　$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(2)　$\theta = \dfrac{3}{4}\pi$ のとき　$\tan\theta =$［シ］

①　$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　　②　1　　③　$\sqrt{3}$　　④　$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　　⑤　−1　　⑥　$-\sqrt{3}$

4　θ が第 2 象限の角で，$\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ のとき，$\sin\theta = \dfrac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}$，$\tan\theta = -\dfrac{\boxed{ソ}}{\sqrt{\boxed{タ}}}$ である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ Note }

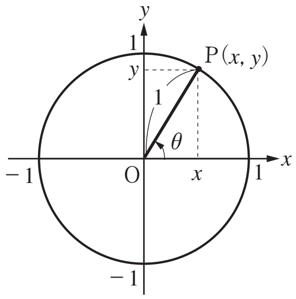
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第9講　三角関数のグラフ，方程式と不等式

§1　三角関数のグラフ

要点整理 と 公式

要点1　$y=\sin\theta$，$y=\cos\theta$ **のグラフ**



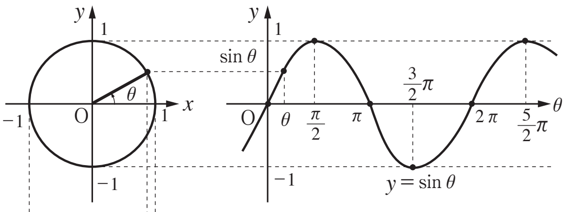
右図のように，角 θ の動径と単位円の交点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると，

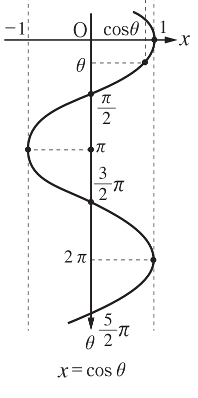
$\sin\theta=y$，$\cos\theta=x$

と表される。このことを用いて，

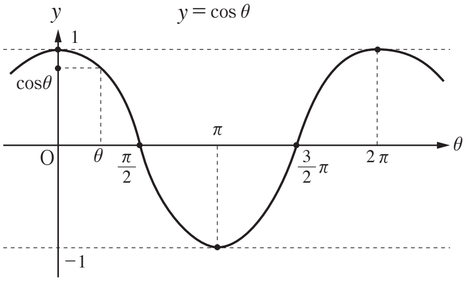
関数 $y=\sin\theta$，$x=\cos\theta$ のグラフ

をかくことができる。





$x=\cos\theta$ の x を y にしてグラフをかくと以下。



動径は，ある位置から 1 回転するともとの位置に戻る。よって，$y=\sin\theta$，$y=\cos\theta$ のグラフは，ともに「　　　　」ごとに同じ形をくり返す。この 2π を，$y=\sin\theta$，$y=\cos\theta$ の「　　　　」といい，$y=\sin\theta$，$y=\cos\theta$ は 2π を周期とする「　　　　　　」という。

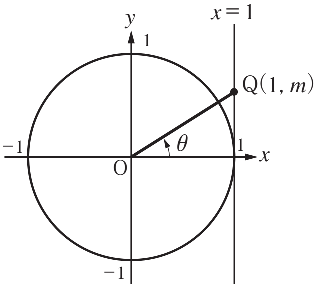
※ 4π や -2π なども $y=\sin\theta$，$y=\cos\theta$ の周期であるが，周期は，普通は「正の周期のうちで最小のもの」をさす。

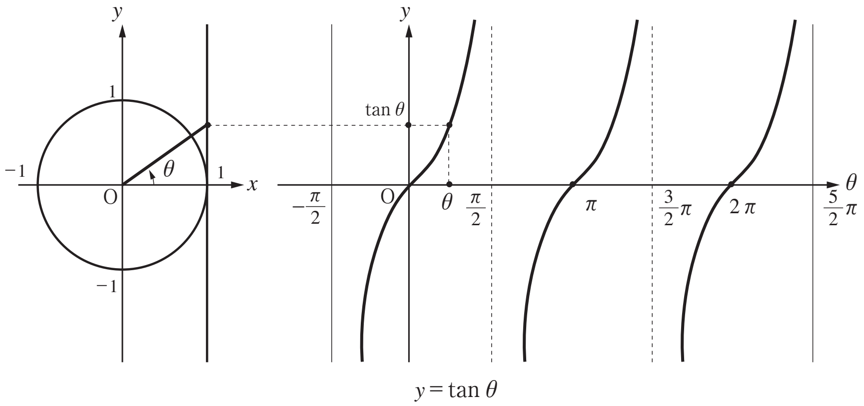
要点2　$y = \tan\theta$ のグラフ

右図のように，一般角 θ の動径と $x = 1$ との交点を

Q$(1,\ m)$とすると，$m = \tan\theta$ と表される。

このことを用いて，関数 $y = \tan\theta$ のグラフをかくことができる。





グラフを見ると，「　　　」ごとに同じ形を繰り返す。つまり $y = \tan\theta$ は，π を周期とする周期関数である。

$\tan\theta$ は $\theta = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$（$n$ は整数)では定義されない。$y = \tan\theta$のグラフは $\theta = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$に近づくと直線 $\theta = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$ に限りなく近づく。

グラフが限りなく近づく線を，そのグラフの「　　　　　」という。

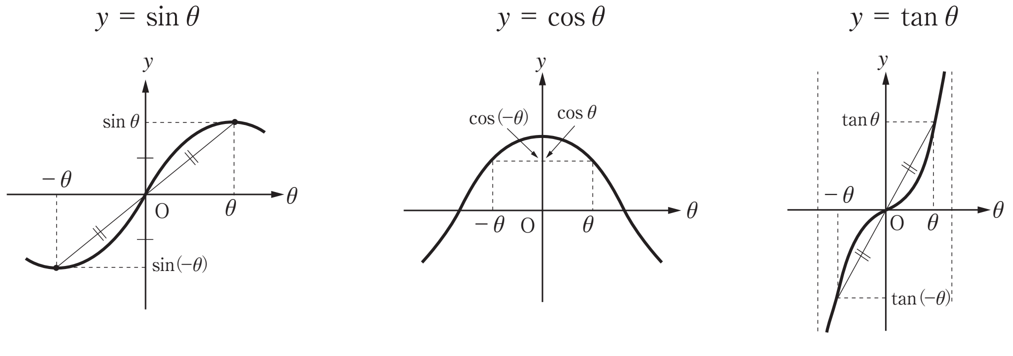
要点3　三角関数のグラフの特徴

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$，$\cos(-\theta) = \cos\theta$，$\tan(-\theta) = -\tan\theta$ より，

三角関数 $y = \sin\theta$，$y = \cos\theta$，$y = \tan\theta$　のグラフについて，以下のことがいえる。

・$y = \sin\theta$，$y = \tan\theta$ のグラフは，原点に関して対称である。

・$y = \cos\theta$ のグラフは，y 軸に関して対称である。



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

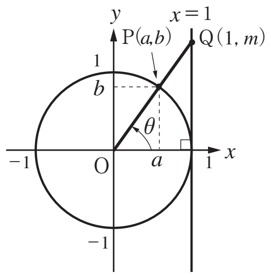
1

次の関数のグラフをかけ。

(1)　$y = \sin\theta$　　(2)　$y = \cos\theta$　　(3)　$y = \tan\theta$

Point Pickup

関数 $y = \sin\theta$，$y = \cos\theta$，$y = \tan\theta$ のグラフ



角 θ の動径と，単位円の交点 P$(a,\ b)$，

$x = 1$ の交点 Q$(1,\ m)$とするとき，

　$y = \sin\theta$ の y 座標は

　$y = \cos\theta$ の y 座標は

　$y = \tan\theta$ の y 座標は

これらの y 座標の増減を意識し，グラフをかく。

$y = \sin\theta$，$y = \cos\theta$ の周期は「　　　」，$y = \tan\theta$ の周期は「　　」。

グラフをかくときは，最低「1周期分」はかく。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§2 ▶ いろいろな三角関数のグラフ

要点整理 と 公式

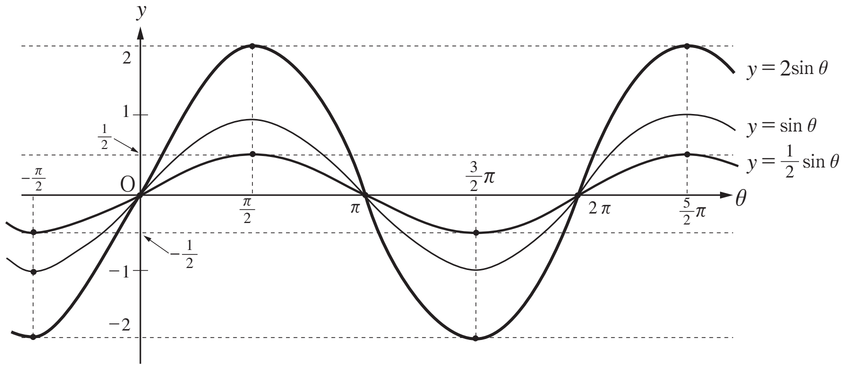
要点4 関数 $y = a\sin\theta$ のグラフ

関数 $y=2\sin\theta$，$y=\dfrac{1}{2}\sin\theta$　のグラフについて考える。

関数 $y = 2\sin\theta$ のグラフは，$y = \sin\theta$ のグラフを，θ 軸をもとに y 軸方向に「　　倍」したものである。

また，$y=\dfrac{1}{2}\sin\theta$ のグラフは，$y=\sin\theta$ のグラフを，θ 軸をもとに y 軸方向に「　　倍」したものである。

$y=2\sin\theta$，$y=\dfrac{1}{2}\sin\theta$ の周期は，$y=\sin\theta$ の周期と同じく「　　　」である。

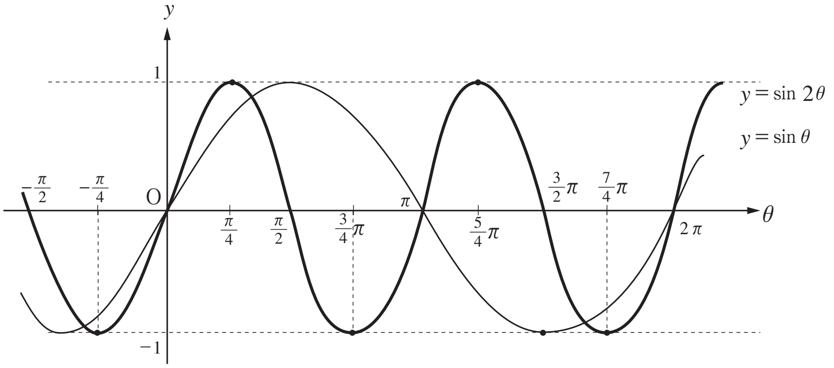


要点5 関数 $y = \sin k\theta$ のグラフ

関数 $y = \sin 2\theta$ のグラフについて考える。

このグラフは，$y=\sin\theta$ のグラフを，y 軸をもとに θ 軸方向に「　　　倍」にしたものである。

また，$y=\sin 2\theta$ の周期は，「$2\pi\times$　　　　」である。



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

一般に，k を正の定数とするとき，次のことが成り立つ。

関数 $y = \sin k\theta$，$y = \cos k\theta$ の周期は「$\dfrac{2\pi}{k}$」

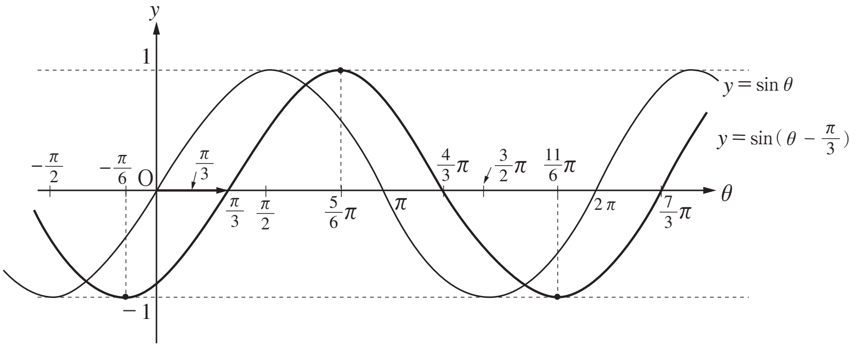
関数 $y = \tan k\theta$ の周期は「$\dfrac{\pi}{k}$」

要点6 関数 $y = \sin(\theta - p)$ のグラフ

関数 $y = \sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right)$ のグラフについて考える。

このグラフは，$y = \sin\theta$ のグラフを，θ 軸方向に $\dfrac{\pi}{3}$「　　　　　　」したものである。

また，$y = \sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right)$ の周期は，$y = \sin\theta$ の周期と同じく「　　　」である。



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2

［1］ 次の $\boxed{}$ にあてはまるものを，下の①～⑦から選べ。ただし，同じものを選んでもよいとする。

(1) 関数 $y = 2\cos\theta$ のグラフは，$y = \cos\theta$ のグラフを $\boxed{ア}$ 軸方向に $\boxed{イ}$ 倍したものである。また，その周期は $\boxed{ウ}$ である。

(2) 関数 $y = \cos 2\theta$ のグラフは，$y = \cos\theta$ のグラフを $\boxed{エ}$ 軸方向に $\boxed{オ}$ 倍したものである。また，その周期は $\boxed{カ}$ である。

(3) 関数 $y = \tan\dfrac{\theta}{2}$ のグラフの周期は $\boxed{キ}$ である。

① θ　② y　③ 2　④ $\dfrac{1}{2}$　⑤ 2π　⑥ π　⑦ $\dfrac{\pi}{2}$

［2］ $y = \cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right)$ のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。

Point Pickup

いろいろな三角関数のグラフ

$y = a\sin\theta$ … $y = \sin\theta$ のグラフを y 軸方向に a 倍。周期は　2π

$y = \sin k\theta$ … $y = \sin\theta$ のグラフを θ 軸方向に $\dfrac{1}{k}$ 倍。周期は $2\pi \times \dfrac{1}{k} = \dfrac{2\pi}{k}$

$y = \sin(\theta - p)$ … $y = \sin\theta$ のグラフを θ 軸方向に p 平行移動。周期は 2π

他の種類の三角関数のグラフも，$y = \cos\theta$（周期 2π），$y = \tan\theta$（周期 π）のグラフを参考にしてかく。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

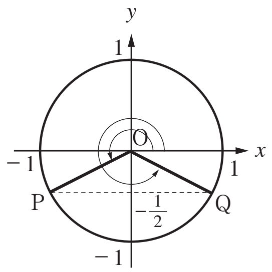
{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§3 ▶ 三角関数を含む方程式

要点整理 と 公式

要点7 sin θ , cos θ を含む方程式



$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，$\sin\theta = -\dfrac{1}{2}$ を満たす θ を求める。

単位円の円周上で，「　　」座標が $-\dfrac{1}{2}$ となる点は

右図の点 P，Q である。

求める θ の動径は OP，OQ であり，

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲では　$\theta =$ 　　　，　　　である。

一般に

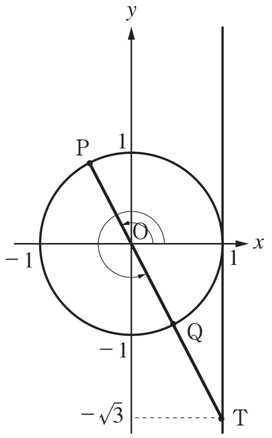
$\sin\theta = a$ を満たす θ は，単位円の円周上で「　　」座標が a となる点，

$\cos\theta = b$ を満たす θ は，単位円の円周上で「　　」座標が b となる点

を考えればよい。

要点8 tan θ を含む方程式

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，$\tan\theta = -\sqrt{3}$ を満たす θ を求める。



直線「$x =$ 　　」上に，「　　」座標が $-\sqrt{3}$ となる点 T をとり，

直線 OT と単位円の交点を右図のように点 P，Q とする。

求める θ の動径は OP，OQ であり，

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲では　$\theta =$ 　　　，　　　である。

一般に，$\tan\theta = c$ を満たす θ は，

直線 $x = 1$ 上に点T $(1,$ 　　$)$ をとり，直線 OT と単位円の交点を考えればよい。

{ メモ }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の等式を満たす θ の値を求めよ。

(1)　$\sin\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　(2)　$\cos\theta = \dfrac{1}{2}$　　(3)　$\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Point Pickup

三角関数を含む方程式（三角方程式）の解法

$\sin\theta\ = a$ … 単位円の円周上で,「　　」座標が a となる点,

$\cos\theta\ = b$ … 単位円の円周上で,「　　」座標が b となる点

$\tan\theta\ = c$ … 直線 $x = 1$ 上に点 T（1,　　）をとり，直線 OT と単位円の交点

単位円上にその点 P（Q）を図示し，動径 OP，OQ の表す角を

与えられた変域内で求める。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

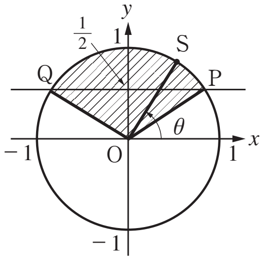
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§4 ▶ 三角関数を含む不等式

要点整理 と 公式

要点9 $\sin\theta$ を含む不等式

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，$\sin\theta \geqq \dfrac{1}{2}$ を満たす θ の値の範囲を求める。



単位円の円周上で，y 座標が $\dfrac{1}{2}$ となる点は右図の点 P，Q であり，

動径 OP，OQ の表す角は，それぞれ $\theta =$ 　　，　　 である。

与えられた不等式の θ を表す動径を OS とすると，

S の y 座標が $\dfrac{1}{2}$ 以上となるのは，斜線部分の扇形 OPQ において

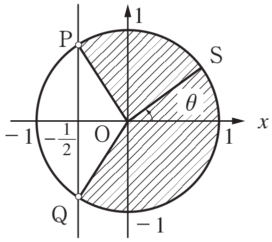
弧 PQ 上（P，Q を含む）に S があるとき。

よって，求める θ の範囲は　　　　　　　である。

要点10 $\cos\theta$ を含む不等式

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，$\cos\theta > -\dfrac{1}{2}$ を満たす θ を求める。

単位円の円周上で，x 座標が $-\dfrac{1}{2}$ となる点は右図の点 P, Q であり，



動径 OP，OQ の表す角は，それぞれ $\theta =$ 　　，　　 である。

与えられた不等式の θ を表す動径を OS とすると，

S の x 座標が $-\dfrac{1}{2}$ より大きくなるのは，斜線部分の扇形 OPQ において弧 PQ 上（P，Q を含まない）に S があるとき。

よって，求める θ の範囲は　　　　，　　　　である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ メモ }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

4

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を満たす θ の値の範囲を求めよ。

(1)　$\sin\theta \leqq -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　　(2)　$\cos\theta > -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Point Pickup

三角関数を含む不等式（三角不等式）の解法

不等式における「不等号」($>$，$\geqq$，$<$，$\leqq$）を

「等号」(=）に変えた「三角方程式」を，単位円を用いて解く。

その単位円において，不等式を満たす θ の値の範囲を図から求める。

与えられた変域によって，答えの範囲が複数に分かれることがある。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

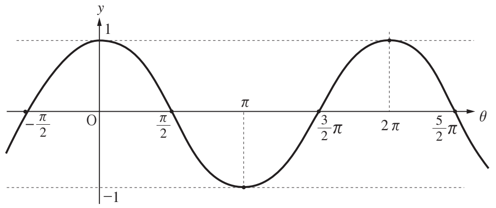
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第9講　確認テスト

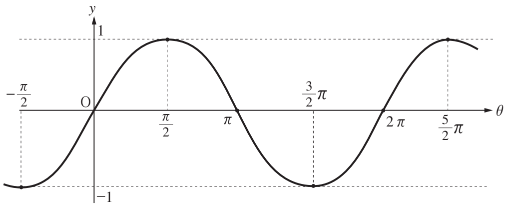
1　次の［　　］にあてはまるものを，下の①〜③からそれぞれ選べ。

$y = \sin\theta$ のグラフは［ア］，$y = \cos\theta$ のグラフは［イ］，$y = \tan\theta$ のグラフは［ウ］である。

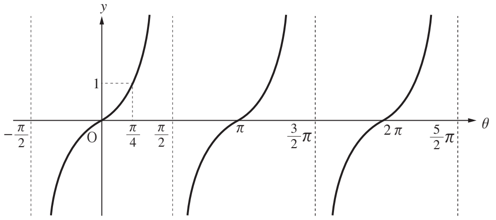
①



②



③



2　次の［　　］にあてはまるものを，下の①〜⑧から選べ。

関数 $y = \cos 3\theta$ のグラフは，$y = \cos\theta$ のグラフを［エ］軸方向に［オ］倍したものである。また，その周期は［カ］である。

①　θ　　②　y　　③　3　　④　$\frac{1}{3}$　　⑤　$\frac{\pi}{3}$　　⑥　$\frac{2}{3}\pi$　　⑦　2π　　⑧　3π

3　$0 \leqq \theta < 2\pi$　のとき，$\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす θ は　$\theta = \frac{［キ］}{［ク］}\pi,\ \frac{［ケ］}{［ク］}\pi$ である。

ただし，［キ］＜［ケ］とする。

4　$0 \leqq \theta < 2\pi$　のとき，$\cos\theta \geqq \frac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす θ は　$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{［コ］},\ \frac{［サ］}{［コ］}\pi \leqq \theta < 2\pi$

である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ Note }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

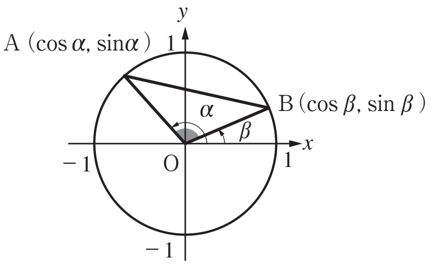
第10講　加法定理

§1　正弦・余弦の加法定理

要点整理 と 公式

要点1　正弦・余弦の加法定理

右図の単位円において，角α，角βの動径をそれぞれOA，OBとすると，A$(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，B$(\cos\beta,\ \sin\beta)$である。



線分ABの長さを2通りの方法で表す。

2点A，B間の距離の公式より

$$\begin{aligned} AB^2 &= (\cos\beta - \cos\alpha)^2 + (\sin\beta - \sin\alpha)^2 \\ &= \cos^2\beta - 2\cos\beta\cos\alpha + \cos^2\alpha \\ &\quad + \sin^2\beta - 2\sin\beta\sin\alpha + \sin^2\alpha \\ &= 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) \cdots ① \end{aligned}$$

また，$\angle AOB = \alpha - \beta$ より，$\triangle OAB$で余弦定理を用いて

$$AB^2 = 1^2 + 1^2 - 2\cdot1\cdot1\cdot\cos(\alpha-\beta) = 2 - 2\cos(\alpha-\beta) \cdots ②$$

①，②より　$2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) = 2 - 2\cos(\alpha-\beta)$

よって，$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \cdots$ (i) である。

(i)においてβを$-\beta$におきかえると，

$$\cos\{\alpha-(-\beta)\} = \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta)$$

$\cos(-\theta) = \cos\theta$，$\sin(-\theta) = -\sin\theta$ より

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \cdots \text{(ii)}$$

(i)において，αを$\dfrac{\pi}{2}-\alpha$におきかえると

$$\cos\left\{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right\} = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta$$

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta$，$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\theta$　より

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$$\cos\left\{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right\}=\cos\left\{\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right\}=\sin(\alpha+\beta)$$

よって，$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ … (iii)

(iii)において β を $-\beta$ におきかえると，

$\sin\{\alpha+(-\beta)\}=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)$

$\cos(-\theta)=\cos\theta$，$\sin(-\theta)=-\sin\theta$ より

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \quad \cdots \text{(iv)}$$

(i)～(iv)より，以下の定理が成り立つ。

■正弦・余弦の加法定理

① $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

② $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

③ $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

④ $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

これを用いることにより，角が和 $\alpha+\beta$ や差 $\alpha-\beta$ の形で表された正弦・余弦の値を，$\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\sin\beta$，$\cos\beta$ を用いて求めることができる。

(ex) $\sin 105^\circ=\sin(60^\circ+45^\circ)$

$=\sin\qquad\cos\qquad+\cos\qquad\sin$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$\cos 15^\circ=\cos(45^\circ-30^\circ)$

$=\qquad 45^\circ\qquad 30^\circ+\qquad 45^\circ\qquad 30^\circ$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1

α は第 1 象限の角，β は第 3 象限の角とする。$\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$, $\cos\beta = -\dfrac{12}{13}$ のとき，次の値を求めよ。

(1) $\sin(\alpha + \beta)$　　(2) $\cos(\alpha + \beta)$

(3) $\sin(\alpha - \beta)$　　(4) $\cos(\alpha - \beta)$

Point Pickup

正弦・余弦の加法定理の利用(三角関数の値を出す)

① $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

② $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

③ $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

④ $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

これらの加法定理と，三角関数の相互関係　$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$，および

角が属する象限(三角関数の符号)に注意。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§2 ▶ 正接の加法定理，2 直線のなす角

要点整理 と 公式

要点 2 正接の加法定理

正弦・余弦の加法定理から，正接の加法定理を導く。

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

分母，分子をそれぞれ $\cos\alpha\ \cos\beta$ で割ると

$$\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

よって，$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ …(i)

(i)で，β を $-\beta$ におきかえると，

$$\tan\{\alpha+(-\beta)\}=\frac{\tan\alpha+\tan(-\beta)}{1-\tan\alpha\tan(-\beta)}$$

$\tan(-\theta)=-\tan\theta$ より，$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$ …(ii)

(i)～(ii)より，以下の定理が成り立つ。

■ **正接の加法定理**

① $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

② $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

(ex) $\tan 75^\circ=\tan(45^\circ+30^\circ)$

$$=\frac{\tan45^\circ+\tan30^\circ}{1-\tan45^\circ\tan30^\circ}=\frac{\quad+\quad}{1-\quad\cdot\quad}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$

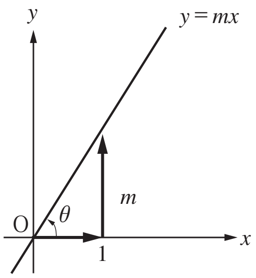
$$=\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\frac{3+2\sqrt{3}+1}{3-1}=\frac{4+2\sqrt{3}}{2}=2+\sqrt{3}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

要点3 直線と x 軸のなす角と 2 直線のなす角

直線 $y = mx$ と x 軸の正の向きのなす角を θ とすると，

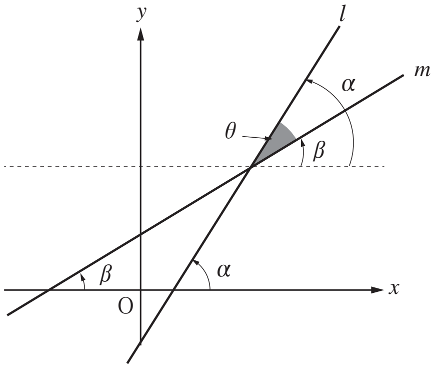
右図より



$$（傾き）m = \frac{（y\text{の増加量}）}{（x\text{の増加量}）} = \frac{m}{1} = \tan\theta$$

つまり　$m = \tan\theta$　である。

右図のように，2 直線 l，m と x 軸の正の向きのなす角をそれぞれ α，β とすると，2 直線のなす角 θ は



θ =

である。この角 θ について，正接の加法定理を用いると

$$\tan\theta = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

となり，$\tan\alpha$，$\tan\beta$，つまり 2 直線のそれぞれの傾きを用いて求めることができる。

直線 l の傾きを m_1，直線 m の傾きを m_2 とすると，$m_1 = \tan\alpha$，$m_2 = \tan\beta$ より

$$\tan\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$　となる。

※なす角 θ は，とくに断りがない限り $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で答える。

上記の計算により $\dfrac{\pi}{2} < \theta \leqq \pi$ となった場合は，

$\pi - \theta$ を 2 直線のなす角として答えるとよい。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2

2 直線 $y = 3x$ … ①，$y = \dfrac{1}{2}x$ … ② と x 軸の正の向きのなす角をそれぞれ α，β とする。

(1)　$\tan\alpha$，$\tan\beta$ の値を求めよ。

(2)　$\tan(\alpha+\beta)$の値を求めよ。

(3)　2 直線①，②のなす角 θ を求めよ。

Point Pickup

正接の加法定理

①　$\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$　　②　$\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$

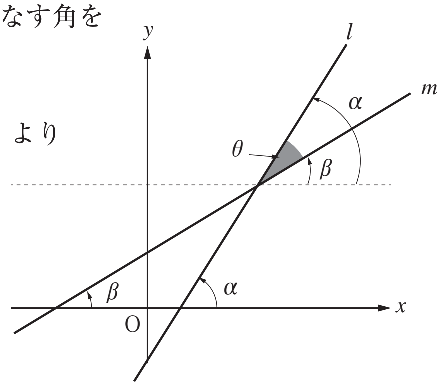
2直線のなす角と正接の値

直線 $y = mx + n$ と x 軸の正の向きのなす角を θ とすると $m = \tan\theta$

2 直線 $y = m_1x + n_1$，$y = m_2x + n_2$ と x 軸の正の向きのなす角をそれぞれ α，β とすると，$m_1 = \tan\alpha$，$m_2 = \tan\beta$

よって，この 2 直線のなす角を θ とすると，$\theta = \alpha - \beta$ より

$$\tan\theta = \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§3 倍角の公式，半角の公式

要点整理 と 公式

要点4　2 倍角の公式と半角の公式

正弦・余弦・正接の加法定理のうち，

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$，　$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

において，β を α におきかえると，次の公式が得られる。

■ 2 倍角の公式

① $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

② $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$，　$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$，$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

③ $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

②の第 1 式において，$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$ を用いると第 2 式が，$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$ を用いると第 3 式が得られる。

これらにより，角度が 2α の三角関数を，その半分の角 α の三角関数で表すことができる。

また，②の第 2 式より　$2\sin^2\alpha=1-\cos 2\alpha$　よって　$\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$

②の第 3 式より　$2\cos^2\alpha=1+\cos 2\alpha$　よって　$\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$

がそれぞれ得られる。このそれぞれにおいて，α を $\dfrac{\alpha}{2}$ でおきかえると，次の公式が得られる。

■ 半角の公式

① $\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{2}$　　② $\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1+\cos\alpha}{2}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

　これらにより，角度がαの三角関数を，その倍の角2αの三角関数で表すことができる。

①，②から $\tan^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}=\dfrac{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}=\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$　が得られる。

※ 2 倍角の公式　$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$　より　$\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{\sin 2\alpha}{2}$ が得られる。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3

$0 < \alpha < \pi$ で，$\cos\alpha = -\dfrac{3}{5}$ のとき，次の値を求めよ。

(1)　$\sin 2\alpha$，$\cos 2\alpha$ の値

(2)　$\sin\dfrac{\alpha}{2}$，$\cos\dfrac{\alpha}{2}$ の値

Point Pickup

2 倍角の公式と半角の公式

2 倍角の公式(倍角の公式)で，角度を「半分」に。

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,\quad \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha,\quad \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

半角の公式で，角度を「倍」に。

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}\qquad \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}\qquad \tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§4 ▶ 三角関数の合成

要点整理 と 公式

要点5 三角関数の合成

$a\sin\theta + b\cos\theta$ の形の式を，「加法定理」を用いて変形することで，

1 種類の三角関数に揃えることを考える。

$\sin(\theta+\alpha) =$　　　　　　　　　　　　より

$\sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha = \sin(\theta+\alpha)$ である。

両辺に r をかけて，$r(\sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha) = r\sin(\theta+\alpha)$

この式の左辺は，

$r\sin\theta\cos\alpha + r\cos\theta\sin\alpha = (r\cos\alpha)\cdot\sin\theta + (r\sin\alpha)\cdot\cos\theta$

と変形できる。 これを，$a\sin\theta + b\cos\theta$ と比較すると

$a = r\cos\alpha$ ，$b = r\sin\alpha$

である。

よって，右図のように

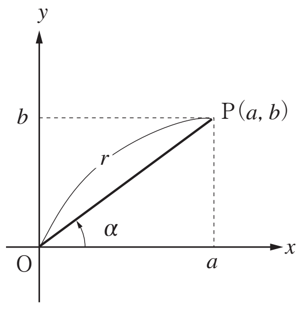
OP $= r$，OP と x 軸の正の向きがなす角が α

であるような点 P $(a,\ b)$ をとると，

$\dfrac{a}{r} =$　　　，　$\dfrac{b}{r} =$　　　より　$a = r\cos\alpha$ ，$b = r\sin\alpha$

$r =$

となる。



したがって，$a\sin\theta + b\cos\theta$ の式からP $(a,\ b)$ を座標平面上に図示することで，

・三平方の定理により r を

・OP と x 軸の正の向きのなす角を考えることにより α を

それぞれ出すことができ，その r，α を用いて，$r\sin(\theta+\alpha)$ の形に変形することができる。

この変形を行うことを，三角関数を「　　　　　」するという。

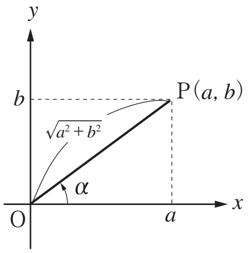
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

■ 三角関数の合成

$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(\theta+\alpha)$

ただし

$\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$



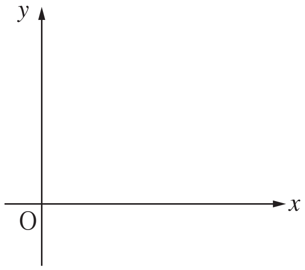
(ex) $\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta$ を合成する。

点 P(　　,　　) をとると，$\mathrm{OP} = \sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2} = \sqrt{4} = 2$

線分 OP と x 軸の正の向きのなす角を α とすると

$\alpha =$

よって，$\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta =$



※$\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2} = 2$ より

$$\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta + \frac{1}{2}\cos\theta\right)$$

$$= 2\left(\sin\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos\theta\cdot\frac{1}{2}\right)$$

$$= 2\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{6} + \cos\theta\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

4

［1］　次の式を$r\sin(\theta+\alpha)$の形に変形せよ。ただし，$r>0$，$-\pi<\alpha<\pi$ とする。

（1）　$\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$　　　（2）　$\sin\theta-\cos\theta$

［2］　$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，方程式 $\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta=-1$ を解け。

Point Pickup

三角関数の合成

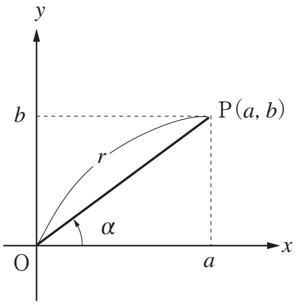
$a\sin\theta+b\cos\theta$ の形の式を $r\sin(\theta+\alpha)$の形に変形

点Ｐを$(a,\ b)$にとり

・$r=\sqrt{a^2+b^2}$

・$\cos\alpha=\dfrac{a}{r}$，$\sin\alpha=\dfrac{b}{r}$ となるα

を用いて変形する。



特に断りがなければ，α は$-\pi<\alpha<\pi$　の範囲でとるとよい。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第10講　確認テスト

1　α は第3象限，β は第4象限の角とする。$\sin\alpha=-\dfrac{3}{5}$，$\cos\beta=\dfrac{4}{5}$ のとき，

$\cos\alpha=-\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$，$\sin\beta=-\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$ である。このとき，$\sin(\alpha+\beta)=\boxed{オ}$，

$\cos(\alpha+\beta)=-\boxed{カ}$ である。

2　2直線 $y=-4x$ … ①，$y=-\dfrac{3}{5}x$ … ② と x 軸の正の向きのなす角をそれぞれ α，β とすると，$\tan\alpha=-\boxed{キ}$，$\tan\beta=-\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$ である。$\tan(\beta-\alpha)=\boxed{コ}$ より，

2直線①，②のなす角を θ とすると，$\theta=\dfrac{\pi}{\boxed{サ}}$ である。

3　$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ のとき，$\cos\alpha=\dfrac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}$，$\sin 2\alpha=\dfrac{\boxed{セ}\sqrt{\boxed{ソ}}}{9}$，

$\cos 2\alpha=-\dfrac{\boxed{タ}}{9}$，$\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sqrt{\boxed{チ}}}{6}$，$\cos\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sqrt{\boxed{ツテ}}}{6}$ である。

4　$\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta=\boxed{ト}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{\boxed{ナ}}\right)$ である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ Note }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第11講　指数法則と計算，指数関数のグラフ

§1　指数の整数への拡張

要点整理 と 公式

要点1　a^0，a^{-n} の定義

a の「n 乗」… a を n 個掛け合わせたもの。

$a^n = a \times a \times \cdots\cdots \times a$　　　n を「指数」という。

a^1，a^2，a^3，…… を，a の「累乗」という。

m，n が「正の整数」のとき，以下の法則が成り立つ。

■ **指数法則**

① $a^m \times a^n = a^{m+n}$　　（ex）$a^2 \times a^3 =$

② $(a^m)^n = a^{m \times n}$　　（ex）$(a^2)^3 =$

③ $(ab)^n = a^n b^n$　　（ex）$(ab)^2 =$

また，$m > n$ のとき，$a^m \div a^n = a^{m-n}$ である。　（ex）$a^6 \div a^2 =$

ここでは，指数が 0 や負の場合でも上の指数法則が成り立つように，累乗 a^n の意味を定める。

①において，$n = 0$ のときも成り立つとすると

$a^m \times a^0 = a^{m+0} = a^m$　　　よって　$a^0 =$

①において，$m + n = 0$，つまり $n = -m$ のときも成り立つとすると

$a^m \times a^{-m} = a^{m+(-m)} = a^0 = 1$　　　よって　$a^{-m} =$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

よって，指数が 0 や負の整数のときの累乗を，次のように定める。

■ a^0，a^{-n} の定義

$a \neq 0$ で，n が正の整数のとき

$a^0 = 1,\quad a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

$a^0 = 1,\quad a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ と定めることにより，m，n が正の整数のときだけでなく，0 や負の整数のときにも指数法則が成り立つ。

(ex) ① $a^5 \times a^{-3} = a^5 \times \quad = a^2 =$　　　よって $a^5 \times a^{-3} = a^{5+(-3)}$

② $(a^3)^{-2} = \dfrac{1}{\quad} = \dfrac{1}{a^6} =$　　　よって $(a^3)^{-2} = a^{3\times(-2)}$

③ $(ab)^{-3} = \dfrac{1}{\quad} = \dfrac{1}{a^3b^3} = \dfrac{1}{a^3} \times \dfrac{1}{b^3} =$　　　よって $(ab)^{-3} = a^{-3}b^{-3}$

また，$a^m \div a^n = \dfrac{a^m}{a^n} = a^m \times \dfrac{1}{a^n} = a^m \times \quad = a^{m-n}$　より $a^m \div a^n = a^{m-n}$

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = (a \quad)^n = a^n(b^{-1})^n = a^n b^{-n} = \dfrac{a^n}{\quad}$　より $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$　である。

よって，以下の指数法則が成り立つ。

■ 指数法則

$a \neq 0$，$b \neq 0$ で，m，n が「整数」のとき

① $a^m \times a^n = a^{m+n}$　　①′ $a^m \div a^n = \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

② $(a^m)^n = a^{m\times n}$

③ $(ab)^n = a^n b^n$　　③′ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1

次の計算をせよ。

(1)　$a^5 \times a^{-3}$

(2)　$a^{-6} \div a^{-2} \times a^4$

(3)　$(a^{-3})^{-4}$

(4)　$(a^4b^{-3})^{-2}$

Point Pickup

指数の拡張と指数法則

$a^0 = 1$,　　$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

① $a^m \times a^n = a^{m+n}$

①′ $a^m \div a^n = \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

② $(a^m)^n = a^{m \times n}$

③ $(ab)^n = a^nb^n$

③′ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

｛解答｝

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§2 累乗根とその性質

要点整理 と 公式

要点2 累乗根

正の整数 n に対し，n 乗して a になる数，つまり

方程式　$x^n = a$　の解 x

を，a の「n 乗根」といい，a の 2 乗根(「平方根」)，3 乗根(「立方根」)，4 乗根，…… を a の「累乗根」という。

(ex) $2^3 = 8$ より，2 は 8 の「　　乗根 」

$(-2)^5 = -32$ より，-2 は -32 の「　　乗根 」

$2^4 = 16$，$(-2)^4 = 16$ より，2 と -2 はともに 16 の「　　乗根 」

以下では，「正の数 a 」の n 乗根のうち，「正であるもの」について考える。

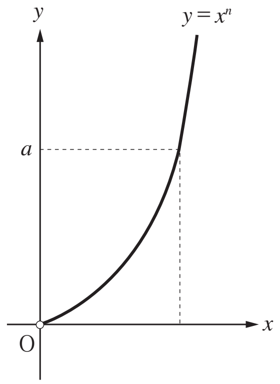
つまり，方程式　$x^n = a$ $(a > 0)$ の解 x のうち，$x > 0$ であるものを考える。

関数 $y = x^n$ $(x > 0)$ のグラフは右図のようになる。

このグラフで $y = a$ $(a > 0)$ を満たす数 x が，

a の正の n 乗根である。グラフより，それはただ 1 つである。

この a の正の n 乗根を，「　　　」と表す。



(ex) $\sqrt[3]{8}$ は，「3 乗して 8 になる数のうち，正のもの」。

$8 = 2^3$ より，それは「　　」である。

よって $\sqrt[3]{8} =$

※特に $n = 2$ のとき，$\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$　とこれまで通り表す。

また，$\sqrt[n]{0} = 0$ と定める。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

一般に，$a > 0$，n が正の整数のとき，以下のことが成り立つ。

$$\sqrt[n]{a} > 0, \qquad \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a, \qquad \sqrt[n]{a^n} = a$$

(ex) $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} =$

要点 3 累乗根の性質

累乗根について，次の性質が成り立つ。

■ 累乗根の性質

$a > 0$，$b > 0$ で，m，n が正の整数のとき

① $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$　　(ex) $\sqrt[5]{2}\sqrt[5]{3} = \sqrt[5]{2 \times 3} = \sqrt[5]{6}$

② $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$　　(ex) $\dfrac{\sqrt[4]{10}}{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{\dfrac{10}{2}} = \sqrt[4]{5}$

③ $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$　　(ex) $(\sqrt[3]{5})^2 = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$

④ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$　　(ex) $\sqrt{\sqrt[3]{7}} = \sqrt[2\times3]{7} = \sqrt[6]{7}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2

次の計算をせよ。

(1)　$\sqrt[3]{24}$　(2) $\sqrt[4]{5} \times \sqrt[4]{125}$　(3)　$\dfrac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}}$

(4)　$\left(\sqrt[6]{9}\right)^3$　(5)　$\sqrt[3]{\sqrt{64}}$

Point Pickup

累乗根とその性質

$a > 0$，$b > 0$ で，m，n が正の整数のとき

$\sqrt[n]{a^n} = a$

$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$　$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$　$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$　$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§3 ▶ 指数の有理数への拡張

要点整理 と 公式

要点4 有理数の指数

指数が有理数のときにも指数法則

$a^m \times a^n = a^{m+n}$　　　$a^m \div a^n = \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$(a^m)^n = a^{m \times n}$　　　$(ab)^n = a^n b^n$

が成り立つように，以下のように定める。

■ 有理数を指数とする累乗

$a>0$，$b>0$で，m，nが正の整数，rが正の有理数のとき

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$　　　(ex)　$a^{\frac{2}{3}} = \sqrt{a}$

$a^{-r} = \dfrac{1}{a^r}$　　　(ex)　$a^{-\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{}$

また，この定義に基づくことで，以下の指数法則が，有理数の指数に対しても成り立つ。

■ 指数法則

$a>0$，$b>0$で，r，sが「有理数」のとき

① $a^r \times a^s = a^{r+s}$　　　①′ $a^r \div a^s = \dfrac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$

② $(a^r)^s = a^{r \times s}$

③ $(ab)^r = a^r b^r$　　　③′ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^r = \dfrac{a^r}{b^r}$

※上記の指数法則は，その指数を「実数」の範囲まで広げてもそのまま成り立つ。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ メモ }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3

［1］　次の値を求めよ。　(1)　$8^{\frac{2}{3}}$　　(2)　$9^{-\frac{1}{2}}$

［2］　次の計算をせよ。

(1)　$3^{\frac{3}{4}}\times 3^{\frac{2}{3}}\div 3^{\frac{5}{12}}$　　(2)　$\left(8^{-\frac{3}{5}}\right)^{\frac{5}{9}}$

(3)　$\sqrt[3]{5}\times\sqrt{5}\times\sqrt[6]{5}$　　(4)　$\sqrt[6]{32}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}\div\sqrt[3]{2}$

Point Pickup

有理数を指数とする累乗

$a>0$，$b>0$で，m，nが正の整数，rが正の有理数のとき

$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$　　$a^{-r}=\dfrac{1}{a^r}$

指数法則

$a>0$，$b>0$で，r，sが有理数のとき

①　$a^r\times a^s=a^{r+s}$　　①′　$a^r\div a^s=\dfrac{a^r}{a^s}=a^{r-s}$

②　$(a^r)^s=a^{r\times s}$

③　$(ab)^r=a^rb^r$　　③′　$\left(\dfrac{a}{b}\right)^r=\dfrac{a^r}{b^r}$

累乗根 $\sqrt[n]{a^m}$ を $a^{\frac{m}{n}}$ の形に表し，指数法則を用いて計算する。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§4 指数関数とそのグラフ

要点整理 と 公式

要点5 指数関数とそのグラフ

a を 1 でない正の定数とするとき，関数「　$y=a$　　」を

a を「　　　」とする x の「　　　　　」という。

指数関数 $y=2^x$ のグラフについて考える。

$x=1,\ 2,\ 3$ のとき，$y=2,\ 4,\ 8$

$x=0$ のとき，$y=2^0=$

$x=-1,\ -2,\ -3$ のとき，$y=2^{-1},\ 2^{-2},\ 2^{-3}=$

$x=\dfrac{1}{2}$ のとき，$y=2^{\frac{1}{2}}=$

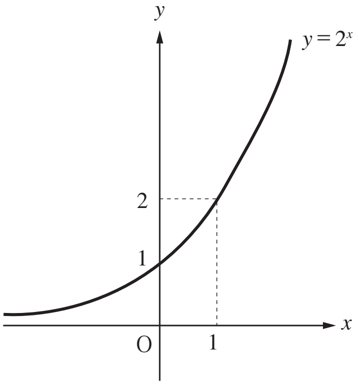
である。

x が無理数の場合も含め，x に対応する y の値を求め，

$x,\ y$ の値の組 $(x,\ y)$ を座標とする点を座標平面上にとると，

右図のような曲線が得られる。

これが指数関数　$y=2^x$　のグラフである。



次に，指数関数　$y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$　のグラフについて考える。この式は

$$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x=\frac{1^x}{2^x}=\frac{1}{2^x}=2^{-x}$$

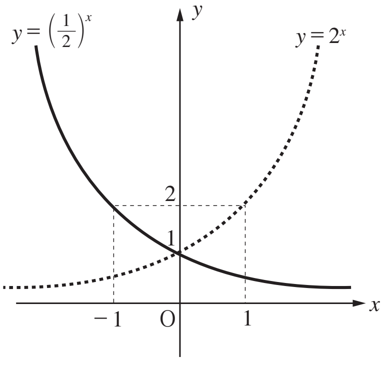
と変形できる。この式は，$y=2^x$ の式の x が $-x$ におき換わったものである。

よって，$y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ のグラフは，

$y=2^x$ のグラフと「y 軸に関して対称」である。

関数 $y=a^x$ のグラフと，関数 $y=\left(\dfrac{1}{a}\right)^x$ のグラフは，

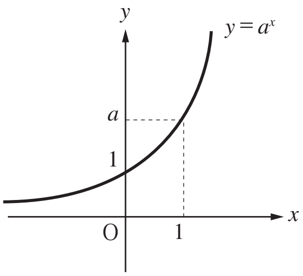
y 軸に関して対称である。



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

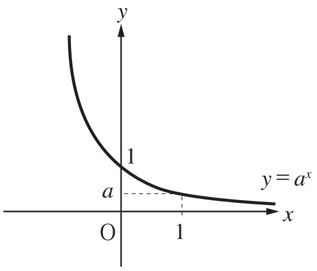
一般に，指数関数 $y = a^x$ のグラフは以下のようになる。

■ 指数関数のグラフ



$a > 1$ のとき

右上がり



$0 < a < 1$ のとき

右下がり

いずれも x 軸を「漸近線」としてもち，$(0,\ 1)$，$(1,\ a)$ を通る。

定義域は実数全体，値域は「　　　　　」である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

4

関数 $y = 3^x$ のグラフをかけ。

また，それと同じ座標平面上に，関数 $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ のグラフをかけ。

Point Pickup

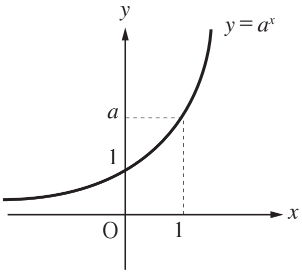
指数関数 $y = a^x$ のグラフ

・$a > 0$ のとき「右上がり」，$0 < a < 1$ のとき「右下がり」の曲線

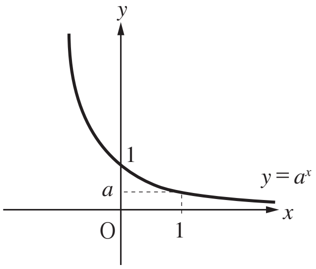
・x 軸を漸近線としてもつ。

・$(0,\ 1)$，$(1,\ a)$ を通る。

・x の変域は実数全体，y の変域は $y > 0$



$a > 1$ のとき



$0 < a < 1$ のとき

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第11講　確認テスト

1　次の計算をせよ。

(1)　$a^4 \times a^{-3} \div a^{-2} = a^{\boxed{ア}}$　　(2)　$(a^{-4})^2 = a^{-\boxed{イ}} = \dfrac{1}{a^{\boxed{イ}}}$

2　次の計算をせよ。

(1)　$\sqrt[3]{8} = \boxed{ウ}$　　(2)　$\sqrt[4]{3} \times \sqrt[4]{27} = \boxed{エ}$　　(3)　$\dfrac{\sqrt[5]{64}}{\sqrt[5]{2}} = \boxed{オ}$

3　次の計算をせよ。

(1)　$2^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{1}{12}} \div 2^{\frac{3}{4}} = \boxed{カ}$　　(2)　$\sqrt[3]{27} \times \sqrt[4]{81} \div \sqrt{9} = \boxed{キ}$

4　次の $\boxed{}$ にあてはまるものを，下の①～④から選べ。

指数関数 $y = a^x$ のグラフは，$a > 1$ のとき $\boxed{ク}$，$0 < a < 1$のとき $\boxed{ケ}$ の曲線である。

また，$\boxed{コ}$ を漸近線にもつ。

関数 $y = a^x$　のグラフと，$y = \left(\dfrac{1}{a}\right)^x$ のグラフは $\boxed{サ}$ に関して対称である。

①　右上がり　　②　右下がり　　③　x 軸　　④　y 軸

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ Note }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第12講　指数を含む方程式・不等式，対数の性質と計算

§1　指数の相等と指数方程式

要点整理 と 公式

要点1　指数の相等と指数方程式

$a>0$，$a\neq1$，つまり a を 1 でない正の定数とするとき，以下のことがいえる。

■ 指数の相等

$$p=q \iff a^p=a^q$$

このことを利用して，指数関数を含む方程式を解く。

(ex) 方程式 $8^x=4$ を解く。

$8^x=(2^3)^x=2$　，　$4=2$　より

$2^{3x}=2^2$

よって $3x=2$

ゆえに $x=\dfrac{2}{3}$

このように，指数関数を含む方程式においては，「　　」を揃えることで解くことができる。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ メモ }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1

次の方程式を解け。

(1)　$9^x = 243$　　(2)　$32^x = \dfrac{1}{16}$　　(3)　$4^x + 2^x - 2 = 0$

Point Pickup

指数を含む方程式（指数方程式）

⟹ 「底」を揃えて，指数の性質

$$p = q \iff a^p = a^q$$

を利用する。

また，a^{2x} と a^x が混じった方程式は，「おき換え」 ⟹ 「2 次方程式」が有効。

ただし，$a^x > 0$ より，おき換えた文字も正であることに注意。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§2 累乗根の大小，指数不等式

要点整理 と 公式

要点2 累乗根の大小

指数関数 $y=a^x$ のグラフより，次のことがいえる。

■ 指数の大小と累乗根の大小

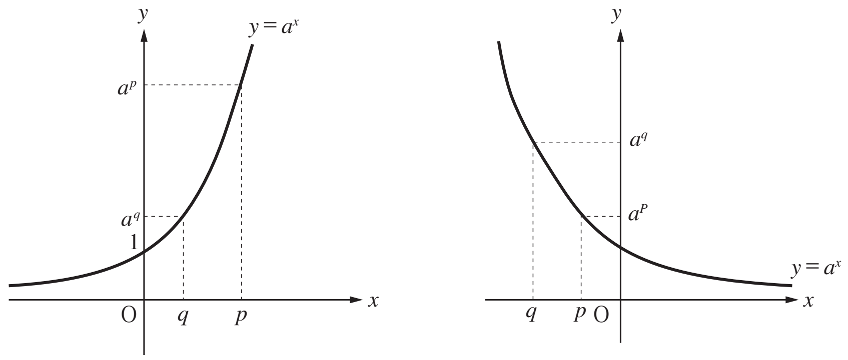
$a>1$ のとき　　x の値が増加すると y の値は増加する

　つまり，　$p>q \iff a^p>a^q$

$0<a<1$ のとき　x の値が増加すると y の値は減少する

　つまり　$p>q \iff a^p<a^q$

$a>1$ のとき　　　　　$0<a<1$ のとき



(ex) $\sqrt{8}$ と $\sqrt[5]{16}$ の大小を考える。

$\sqrt{8}=(2^3)^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{3}{2}}$　，　$\sqrt[5]{16}=(2^4)^{\frac{1}{5}}=2^{\frac{4}{5}}$

指数の大小について　$\dfrac{4}{5}<\dfrac{3}{2}$

底 2 は「　　　　　　　　」から　$2^{\frac{4}{5}}$　　$2^{\frac{3}{2}}$　　つまり $\sqrt[5]{16}<\sqrt{8}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

要点❸ 指数を含む不等式

指数関数の大小に関する性質を利用して，指数関数を含む不等式を解く。

(ex) 不等式 $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{32}$ を解く。

変形すると $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^5$

底 $\frac{1}{2}$ は「　　　　　　　　　　　　　」から x 　 5

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2

［1］$\dfrac{1}{9}$，$\sqrt[4]{27}$，1 の大小を，不等号を用いて表せ。

［2］次の不等式を解け。

(1)　$4^x < 64$　　　(2)　$\left(\dfrac{1}{9}\right)^x \geqq \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-2}$

Point Pickup

指数の大小と累乗根の大小

$\Longrightarrow$「底」を揃えて，指数の性質

$a > 1$ のとき　$p > q \iff a^p > a^q$　（不等号の向きは同じ）

$0 < a < 1$ のとき $p > q \iff a^p < a^q$　（不等号の向きが逆になる）

を利用する。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

｛解答｝

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§3 ▸ 対数

要点整理 と 公式

要点 4 対数の定義

指数関数 $y=2^x$ の値域は，$y>0$ である。

よってそのグラフから，どのような正の数 M に対しても

$M=2^x$　　　　つまり $2^x=M$

を満たす実数 x がただ 1 つ定まる。

例えば，$2^x=8$　より　$x=3$

　　　　$2^x=4$　より　$x=2$　と定まる。

ところが，$2^x=5$　を満たす x は確かに存在するが，その x は「無理数」，つまり循環しない無限小数となる。よって，このような x を表すために，新しい記号を定義する。

一般に，$a>0$，$a\neq 1$ とするとき，どのような正の数 M に対しても

$a^p=M$

を満たす実数 p がただ 1 つ定まる。この p の値を「　　　　」と表し，

a を「　　」とする M の「　　　」という。

また，$\log_a M$ における M を，この対数の「　　　」という。対数の真数は，正の数である。

■ 指数と対数

$a>0$，$a\neq 1$，$M>0$ のとき

$$a^p=M \iff p=\log_a M$$

(ex) $2^4=16$　　より　　$4=$　　　　16

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

対数　$\log_9 3$　の値を求める。

$\log_9 3 = p$　とおくと，　　　より $3^{2p} = 3$　　　よって　$p = \dfrac{1}{2}$ である。

一般に，次の等式が成り立つ。

$$\log_a a^p = p$$

(ex) $\log_2 16 = \log_2 2^4 =$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3

［1］　次の関係を $\log_a M = p$　の形に書け。

（1）　$2^6 = 64$　　（2）　$3^{-2} = \dfrac{1}{9}$　　（3）　$9^{\frac{1}{2}} = 3$

［2］次の対数の値を求めよ。

（1）　$\log_{10} 1000$　　（2）　$\log_3 \sqrt{3}$　　（3）　$\log_4 \dfrac{1}{16}$

Point Pickup

対数

$a > 0$，$a \neq 1$，$M > 0$のとき　　$a^p = M$　$\Longleftrightarrow$　$p = \log_a M$

つまり，対数　$\log_a M$ の値は，底 a を「何乗」すると真数 M になるか，である。

よって，$\log_a a^p = p$　が成り立つ。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§4 ▶ 対数の性質

要点整理 と 公式

要点5 対数の性質

$a^0 = 1$，$a^1 = a$　より，次のことが成り立つ。

$\log_a 1 = 0$,　　$\log_a a = 1$

また，「指数法則」と対数の定義から，対数の性質が導かれる。

$p = \log_a M$，$q = \log_a N$ … ①　とすると，$a^p = M$，$a^q = N$

「M と N の積」について　$MN = a^p \times a^q = a$

これを対数を使って表すと　$\log_a MN = p + q$ … ②

①，②より $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$

「M と N の商」について　$\dfrac{M}{N} = \dfrac{a^p}{a^q} = a$

これを対数を使って表すと　$\log_a \dfrac{M}{N} = p - q$ … ③

①，③より $\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

「M の k 乗」について　$M^k = (a^p)^k = a$

これを対数を使って表すと　$\log_a M^k = kp$ … ④

①，④より $\log_a M^k = k \log_a M$

■ 対数の性質

$a > 0$，$a \neq 1$，$M > 0$，$N > 0$，k が実数のとき

① $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$

② $\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

③ $\log_a M^k = k \log_a M$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ メモ }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

4

次の計算をせよ。

(1)　$\log_8 2+\log_8 32$　　(2)　$\log_5 6-\log_5 30$

(3)　$3\log_2\sqrt[3]{6}-\log_2 3$　　(4)　$\log_3\dfrac{\sqrt{6}}{3}+2\log_3\sqrt{3}-\dfrac{1}{2}\log_3 6$

Point Pickup

対数の性質

$a>0$，$a\neq 1$，$M>0$，$N>0$，k が実数のとき

① $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$　$\Longleftrightarrow$　①′ $\log_a M+\log_a N=\log_a MN$

② $\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$　$\Longleftrightarrow$　②′ $\log_a M-\log_a N=\log_a \dfrac{M}{N}$

③ $\log_a M^k=k\log_a M$　$\Longleftrightarrow$　③′ $k\log_a M=\log_a M^k$

対数の計算においては，①，②，③を用いて「分けていく」か，

①′，②′，③′ を用いて「まとめていく」か，のいずれかの手法をとる。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第12講　確認テスト

1　方程式 $25^x = 5$ の解は $x = \dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ である。

2　(1)　次の3つの数の大小を不等号を用いて表すと $\boxed{ウ} < \boxed{エ} < \boxed{オ}$ である。

①　$\sqrt[3]{36}$　　②　1　　③　$\sqrt{6}$

(2)　不等式 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x \leqq \dfrac{1}{16}$ の解は $\boxed{カ}$ である。$\boxed{カ}$ にあてはまるものを

①　$x \leqq 4$　　②　$x \geqq 4$　から1つ選べ。

3　(1)　$2^3 = 8$ を $\log_a M = p$ の形で表すと $\log_2 \boxed{キ} = \boxed{ク}$ である。

(2)　$\log_3 \dfrac{1}{27} = \log_3 3^{\boxed{ケコ}} = \boxed{ケコ}$ である。

4　次の計算をせよ。

(1)　$\log_4 2 + \log_4 8 = \boxed{サ}$　　(2)　$\log_3 2 - \log_3 18 = \boxed{シス}$

(3)　$\log_2 18 - 4\log_2\sqrt{3} = \boxed{セ}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ Note }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第13講　底の変換，対数関数のグラフと方程式・不等式，常用対数

§1 底の変換公式

要点整理 と 公式

要点1 対数の底の変換公式

1024に関して，$\log_2 1024 = \log_2 2^{10} =$ 　　である。

このように，ある実数 M に関して，底を c とする対数 $\log_c M$ を求めることを，

底を c とする「対数をとる」という。

これを用いて，a を底とする対数 $\log_a b$ を，c を底とする対数で表す。

$\log_a b = p$ とすると　　$a^p = b$

c を底とする両辺の「対数をとる」と　　$a^p =$ 　　b

対数の性質より $p\log_c a = \log_c b$

$a \neq 1$ より $\log_c a \neq 0$ 　　よって $p = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

したがって，$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ である。

■ 底の変換公式

a，b，c が正の数で，$a \neq 1$，$c \neq 1$ のとき

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

(ex) $\log_9 27 = \dfrac{\log_3 \quad}{\log_3 \quad} = \dfrac{\log_3 3^3}{\log_3 3^2} = \dfrac{3}{2}$

とくに，$b \neq 1$ のとき $\log_a b = \dfrac{\log_b \quad}{\log_b \quad} = \dfrac{1}{\log_b a}$ より

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ メモ }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1

［1］　次の値を求めよ。　（1）　$\log_{16} 8$　（2）　$\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{27}$

［2］　次の計算をせよ。

（1）　$\log_2 5 \cdot \log_5 32$　（2）　$\log_9 49 - \log_3 63$

Point Pickup

底の変換公式

a，b，c が正の数で，$a \neq 1$，$c \neq 1$ のとき

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

底がそろっていないときの対数の計算は，底の変換公式でそろえるとよい。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§2 ▶ 対数関数とそのグラフ

要点整理 と 公式

要点2 対数とそのグラフ

対数関数 $y=\log_2 x$ のグラフについて考える。

$x=2,\ 4,\ 8$ のとき，　$y=$

$x=1$ のとき，$y=\log_2 1=\log_2 2^0=$

$x=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{8}$ のとき，$y=$

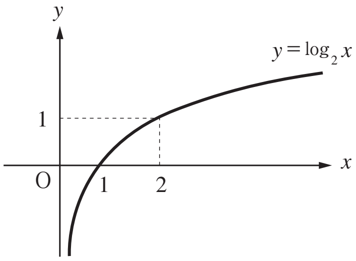
である。

$y=\log_2 x$　より　$x=2^y$　である。$2^y>0$より　$x>0$　である。

よって，$y=\log_2 x$　の定義域は「　　　」である。

x が無理数の場合も含め，$x>0$ である x に対応する y の値を求め，x，y の値の組$(x,\ y)$を座標とする点を座標平面上にとると，右図のような曲線が得られる。

これが対数関数　$y=\log_2 x$　のグラフである。



次に，対数関数　$y=\log_{\frac{1}{2}} x$　のグラフについて考える。この式は

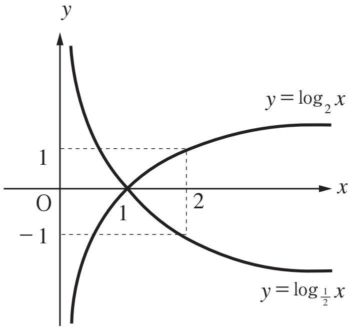
$$y=\frac{\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{2}}=\frac{\log_2 x}{-1}=-\log_2 x$$

つまり $-y=\log_2 x$　と変形できる。

この式は，$y=\log_2 x$ の式の y が $-y$ におき換わったものである。

よって，$y=\log_{\frac{1}{2}} x$ のグラフは，

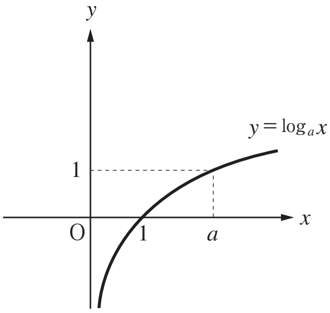
$y=\log_2 x$ のグラフと「x 軸に関して対称」である。



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

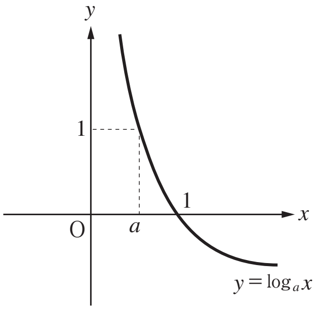
一般に，対数関数 $y = \log_a x$ のグラフは以下のようになる。

■対数関数のグラフ



$a > 1$ のとき

右上がり



$0 < a < 1$ のとき

右下がり

いずれも y 軸を「漸近線」としてもち，(1，0)，(a，1)を通る。

定義域は「　　　　」，値域は実数全体である。

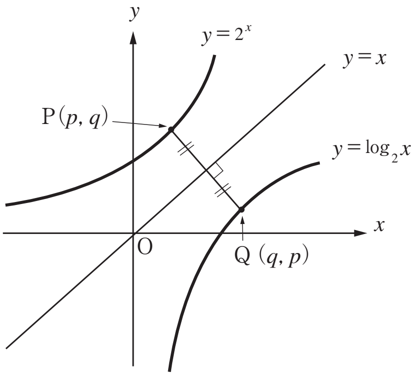
※点P（p，q）が関数 $y = 2^x$ のグラフ上にあるとき，

$q = 2^p$　　つまり　　$p = \log_2 q$　　である。

これは，点Q（q，p）が関数 $y = \log_2 x$ のグラフ上にあることを示している。

逆に点Q が関数 $y = \log_a x$ のグラフ上にあれば，

点 P は関数 $y = a^x$ のグラフ上にある。



点(p，q)と点(q，p)は直線 $y = x$ に関して対称であるから，$y = 2^x$ のグラフと $y = \log_2 x$ のグラフは，直線 $y = x$ に関して対称である。

一般に，底がともに a である指数関数 $y = a^x$ のグラフと対数関数 $y = \log_a x$ のグラフは，直線 $y = x$ に関して対称である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2

関数 $y = \log_3 x$ のグラフをかけ。

また，それと同じ座標平面上に，関数 $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ のグラフをかけ。

Point Pickup

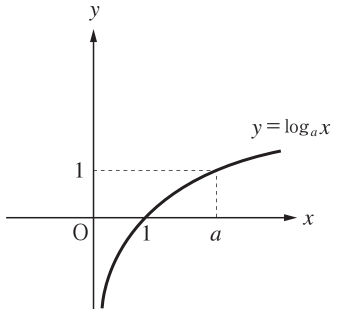
対数関数 $y = \log_a x$ のグラフ

・$a > 0$ のとき「右上がり」，　$0 < a < 1$ のとき「右下がり」の曲線

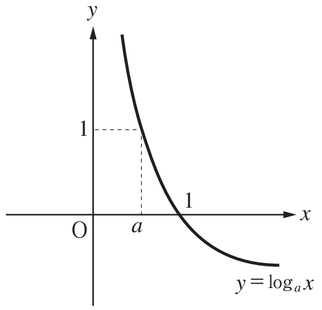
・y 軸を漸近線としてもつ。

・$(1,\ 0)$，$(a,\ 1)$を通る。

・x の変域は「　　　」，yの変域は実数全体



$a > 1$ のとき



$0 < a < 1$ のとき

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§3 対数の大小，対数方程式・不等式

要点整理 と 公式

要点3 対数の大小

対数関数　$y=\log_a x$　のグラフより，次のことがいえる。

■真数の大小と対数の大小

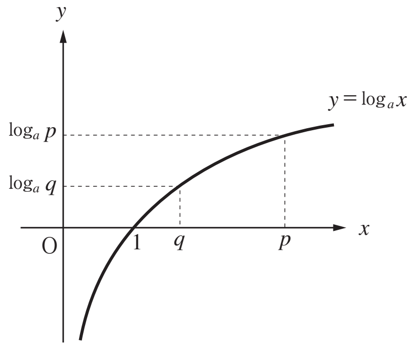
$a>1$ のとき　　x の値が増加すると y の値が増加する

　つまり　　$p>q \iff \log_a p>\log_a q$

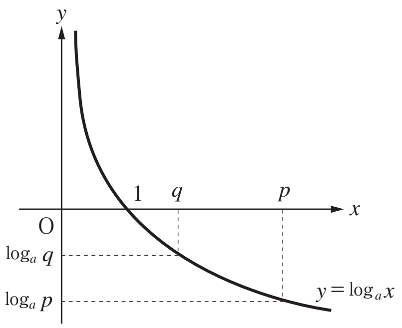
$0<a<1$ のとき　x の値が増加すると y の値は減少する

　つまり　　$p>q \iff \log_a p<\log_a q$

$a>1$ のとき



$0<a<1$ のとき



(ex)　$\log_2 3$　と　$\log_4 10$ の大小を考える。

$$\log_4 10=\frac{\log_2 10}{\log_2 4}=\frac{\log_2 10}{2}=\frac{1}{2}\log_2 10=\log_2 10^{\frac{1}{2}}=\log_2\sqrt{10}$$

真数の大小について，$3<\sqrt{10}$

底2は「　　　　　　　」から　$\log_2 3<\log_2\sqrt{10}$

つまり　$\log_2 3<\log_4 10$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

要点4　対数を含む方程式

対数の性質を用いて，対数を含む方程式を解く。

（ex）　方程式 $\log_2 x = 3$　を解く。

真数は「正」であるから，$x > 0$ … ①

対数の定義より　$x = 2^3 = 8$

これは①を満たすから　　$x = 8$

また，$a > 0$，$a \neq 1$，つまり a を 1 でない正の定数とするとき，以下のことがいえる。

■ **対数の相等**

$p > 0$，$q > 0$ のとき

$p = q \iff \log_a p = \log_a q$

このことを利用して，対数を含む方程式を解く。

（ex）方程式 $\log_2 x = 3$　を解く。

真数は「正」であるから，$x > 0$ … ①

また $3 = \log_2$　　より，方程式を変形して　$\log_2 x = \log_2 2^3$

つまり，$\log_2 x = \log_2 8$

よって　$x = 8$　これは①を満たすから　$x = 8$

要点5　対数を含む不等式

対数関数の大小に関する性質を利用して，対数関数を含む不等式を解く。

（ex）不等式　$\log_{\frac{1}{2}} x > 2$ を解く。

真数は「正」であるから，$x > 0$ … ①

不等式を変形すると　$\log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^2$　つまり　$\log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}$

底 $\frac{1}{2}$ は「　　　　　　　　　　　」から　$x < \frac{1}{4}$ … ②

①，②より $0 < x < \frac{1}{4}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3

［1］ $\log_3 \dfrac{1}{2}$，$\log_9 4$，0，1 の大小を不等号を用いて表せ。

［2］ 次の方程式，不等式を解け。

(1) $\log_2(x-1)=4$　(2) $\log_2 x+\log_2(x+2)=3$　(3) $\log_{\frac{1}{3}} x \geqq 3$

Point Pickup

真数の大小と対数の大小

$\Longrightarrow$「底」を揃えて，対数の性質

$a>1$ のとき　$p>q \iff \log_a p>\log_a q$　（不等号の向きは同じ）

$0<a<1$ のとき　$p>q \iff \log_a p<\log_a q$　（不等号の向きが逆になる）

を利用する。

対数を含む方程式（対数方程式）

$\Longrightarrow$「対数の定義」$\log_a x=b \iff x=$　　　を用いる。

または，「底」を揃えて，対数の性質

$p=q \iff \log_a p=\log_a q$

を利用する。

「　　　　　　」であることに注意。

対数を含む不等式（対数不等式）

$\Longrightarrow$「底」を揃えて，真数の大小と対数の大小の関係を用いる。

「　　　　　　」であることに注意。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

｛解答｝

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§4 ▶ 常用対数

要点整理 と 公式

要点6 常用対数

ある数 x の「10 を底とする対数」$\log_{10} x$ を「　　　　　　」という。

いくつかの x の値に対する常用対数の値を，以下の表に表す。

x	…	10000	1000	100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{10000}$	…
$\log_{10}x$	…	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	…

また，$x = 2$のとき　$\log_{10}2 \fallingdotseq 0.3010$

$x = 3$のとき　$\log_{10}3 \fallingdotseq 0.4771$　　　である。

さらに，2 の常用対数の値を，$\log_{10}2 = 0.3010$　とすると，

$\log_{10}4 = \log_{10}2^2 = 2\log_{10}2 = 2 \times 0.3010 = 0.6020$ となり，

4 の常用対数の値を求めることができる。

$y = \log_{10} x$ は増加関数であることより，

x が 1 桁の数　$\Longleftrightarrow$　$1 \leqq x < 10$　$\Longleftrightarrow$　$10^0 \leqq x < 10^1$　$\Longleftrightarrow$　$0 \leqq \log_{10} x < 1$

x が 2 桁の数　$\Longleftrightarrow$　$10 \leqq x < 100$　$\Longleftrightarrow$　$10^1 \leqq x < 10^2$　$\Longleftrightarrow$　$1 \leqq \log_{10} x < 2$

である。

一般に 以下のことが成り立つ。

■ 整数 N の桁数

N が n 桁の数　$\Longleftrightarrow$　$10^{n-1} \leqq N < 10^n$　　$\Longleftrightarrow$　$n-1 \leqq \log_{10} N < n$

したがって，自然数 N の桁数を調べたいときは，

「　　　　　」の値を計算し，それがどの範囲にあるかを調べれば良い。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ メモ }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

4

［1］　$\log_{10}2 = 0.3010$，$\log_{10}3 = 0.4771$ とするとき，$\log_{10}15$　の値を求めよ。

［2］　2^{30} は何桁の整数か。ただし，$\log_{10}2 = 0.3010$ とする。

Point Pickup

$\log_{10}2$，$\log_{10}3$ の値から対数の値を求める

対数の性質

$\log_a MN = \log_a M + \log_a N$　　　$\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

$\log_a M^k = k \log_a M$

を用いて，$\log_{10}2$，$\log_{10}3$　の値を使える形に変形する。

桁数を求める

整数 N の桁数を求める手順は以下。

① N の「常用対数」をとり，$\log_{10}N$ の値を求める。

② $n - 1 \leqq \log_{10}N < n$　となるような整数 n をみつける。

③ $10^{n-1} \leqq N < 10^n$　の形になおす。

④ 整数 N の桁数は n 桁である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第13講　確認テスト

1 (1) $\log_8 4 = \dfrac{\log_2 \boxed{ア}}{\log_2 \boxed{イ}} = \dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$

(2) (i) $\log_3 2 \cdot \log_2 9 = \boxed{オ}$　　(ii) $\log_8 27 - \log_2 24 = \boxed{カキ}$

2 次の $\boxed{}$ にあてはまるものを，下の①～④から選べ。

対数関数 $y = \log_a x$ のグラフは，$a > 1$ のとき $\boxed{ク}$，$0 < a < 1$ のとき $\boxed{ケ}$ の曲線である。また，$\boxed{コ}$ を漸近線にもつ。

関数 $y = \log_a x$　のグラフと，$y = \log_{\frac{1}{a}} x$ のグラフは $\boxed{サ}$ に関して対称である。

①　右上がり　　②　右下がり　　③　x 軸　　④　y 軸

3 (1) 次の 3 つの数の大小を不等号を用いて表すと $\boxed{シ} < \boxed{ス} < \boxed{セ}$ である。

① $\log_{\frac{1}{3}} 5$　　② $3\log_{\frac{1}{3}} 2$　　③ $\log_{\frac{1}{3}} 7$

(2) 次の方程式，不等式を解け。

(i) $\log_3 x = 2$　　$x = \boxed{ソ}$　　(ii) $\log_2 x < 5$　　$\boxed{タ} < x < \boxed{チツ}$

4 $\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$　とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $\log_{10} 6 = 0.\boxed{テトナニ}$ である。　　(2) 3^{30} は $\boxed{ヌネ}$ 桁の整数である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ Note }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

テキスト解答

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第1講　式と計算

1

［1］（1）$(x+4)^3 = x^3 + 3\cdot x^2\cdot 4 + 3\cdot x\cdot 4^2 + 4^3 = x^3 + 12x^2 + 48x + 64$

（2）$(3x-2y)^3 = (3x)^3 - 3\cdot(3x)^2\cdot 2y + 3\cdot 3x\cdot(2y)^2 - (2y)^3$

$= 27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3$

（3）$(x+5)(x^2-5x+25) = (x+5)(x^2 - x\cdot 5 + 5^2) = x^3 + 5^3 = x^3 + 125$

（4）$(2a-3b)(4a^2+6ab+9b^2) = (2a-3b)\{(2a)^2 + 2a\cdot 3b + (3b)^2\}$

$= (2a)^3 - (3b)^3 = 8a^3 - 27b^3$

［2］（1）$x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x+2)(x^2 - x\cdot 2 + 2^2) = (x+2)(x^2-2x+4)$

（2）$27a^3 - 64b^3 = (3a)^3 - (4b)^3$

$= (3a-4b)\{(3a)^2 + 3a\cdot 4b + (4b)^2\} = (3a-4b)(9a^2 + 12ab + 16b^2)$

2

（1）$(x+3)^5 = {}_5C_0x^5 + {}_5C_1x^4\cdot 3^1 + {}_5C_2x^3\cdot 3^2 + {}_5C_3x^2\cdot 3^3 + {}_5C_4x^1\cdot 3^4 + {}_5C_5\cdot 3^5$

$= x^5 + 15x^4 + 90x^3 + 270x^2 + 405x + 243$

（2）$(2x-3y)^6$ の展開式の一般項は ${}_6C_r(2x)^{6-r}\cdot(-3y)^r = {}_6C_r\cdot 2^{6-r}\cdot(-3)^r x^{6-r} y^r$

x^4y^2 は，$6-r=4$　つまり　$r=2$ のときの項である。

よって，求める係数は ${}_6C_r\cdot 2^{6-r}\cdot(-3)^r = {}_6C_2\cdot 2^4\cdot(-3)^2 = 15\cdot 16\cdot 9 = 2160$

3

（1）商 $3x+10$，余り 32

（2）商 x^2+2x-8，余り 27

（筆算）（1）

```
         3x  + 10
      ___________
x − 3 ) 3x² +  x + 2
        3x² − 9x
        ---------
             10x + 2
             10x − 30
             --------
                  32
```

（2）

```
           x² + 2x − 8
      _____________________
x + 4 ) x³ + 6x²        − 5
        x³ + 4x²
        --------------------
             2x²
             2x² + 8x
             ---------------
                  − 8x − 5
                  − 8x − 32
                  ---------
                         27
```

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

4

［1］（1）$\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=\dfrac{x(x+1)}{(x+1)(x-1)}=\dfrac{x}{x-1}$　　（2）$\dfrac{x^2-8x+15}{x^2-3x-10}=\dfrac{(x-3)(x-5)}{(x+2)(x-5)}=\dfrac{x-3}{x+2}$

［2］（1）$\dfrac{x^2-x}{x^2-3x-4}\div\dfrac{x-1}{x-4}=\dfrac{x^2-x}{x^2-3x-4}\times\dfrac{x-4}{x-1}$

$$=\frac{x(x-1)}{(x-4)(x+1)}\times\frac{x-4}{x-1}$$

$$=\frac{x}{x+1}$$

（2）$\dfrac{1}{x^2+x}-\dfrac{2}{x^2+2x}=\dfrac{1}{x(x+1)}-\dfrac{2}{x(x+2)}$

$$=\frac{x+2}{x(x+1)(x+2)}-\frac{2(x+1)}{x(x+1)(x+2)}$$

$$=\frac{x+2-2(x+1)}{x(x+1)(x+2)}$$

$$=\frac{-x}{x(x+1)(x+2)}$$

$$=-\frac{1}{(x+1)(x+2)}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第2講　式と証明

1

等式の右辺を x について整理すると

$$a(x-1)^2+b(x-1)+c=ax^2-2ax+a+bx-b+c$$

$$=ax^2+(-2a+b)x+(a-b+c)$$

よって，等式は次のようになる。

$$2x^2-1=ax^2+(-2a+b)x+(a-b+c)$$

これが x についての恒等式となるのは

$$a=2,\ -2a+b=0,\ a-b+c=-1$$

つまり　$a=2,\ b=4,\ c=1$　のとき

2

(1)　(右辺) $=x^4+x^3+x^2+x-x^3-x^2-x-1=x^4-1=$ (左辺)

よって，$x^4-1=(x-1)(x^3+x^2+x+1)$

(2)　$a+b+c=0$　より　$a=-b-c$

このとき

(左辺) $=(-b-c)^2+b^2=b^2+2bc+c^2+b^2=2b^2+2bc+c^2$

(右辺) $=c^2-2(-b-c)b=c^2+2b^2+2bc=2b^2+2bc+c^2$

よって　　$a+b+c=0$ のとき，$a^2+b^2=c^2-2ab$

(別解)

(左辺) $-$ (右辺) $=a^2+b^2-(c^2-2ab)=a^2+2ab+b^2-c^2=(a+b)^2-c^2$

$=(a+b+c)(a+b-c)=0$

よって　　$a+b+c=0$ のとき，$a^2+b^2=c^2-2ab$

(3)　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$　とおくと，$a=bk,\ c=dk$

このとき

(左辺) $=\dfrac{bk+dk}{b+d}=\dfrac{k(b+d)}{b+d}=k$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$$（右辺）= \frac{bk-dk}{b-d} = \frac{k(b-d)}{b-d} = k$$

よって　$\dfrac{a+c}{b+d} = \dfrac{a-c}{b-d}$

3

(1)　$(ab+1)-(a+b) = ab+1-a-b = (b-1)a-(b-1) = (b-1)(a-1)$

$a>1,\ b>1$　より　$a-1>0,\ b-1>0$

よって　$(b-1)(a-1)>0$

したがって，$ab+1>a+b$

(2)　$(x^2+y^2)-2xy = x^2-2xy+y^2 = (x-y)^2 \geqq 0$

よって $x^2+y^2 \geqq 2xy$

等号が成り立つのは　$x-y=0$　つまり $x=y$　のとき

(3)　$(a+2)^2-(2\sqrt{a+1})^2 = a^2+4a+4-4(a+1) = a^2>0$　（$a>0$より）

よって，$(a+2)^2>(2\sqrt{a+1})^2$

$a>0$　より　$a+2>0,\ 2\sqrt{a+1}>0$

したがって，$a+2>2\sqrt{a+1}$

4

$x>0$，$\dfrac{4}{x}>0$ より，（相加平均）≧（相乗平均）から

$$x+\frac{4}{x} \geqq 2\sqrt{x\cdot\frac{4}{x}} = 2\cdot2 = 4$$

よって　$x+\dfrac{4}{x} \geqq 4$

等号が成り立つのは　$x=\dfrac{4}{x}$　つまり　$x^2=4$　のときで，

$x>0$　より $x=2$　のときである。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第3講　複素数と２次方程式

1

［1］ (1) $(3+2i)-(2-4i)=3+2i-2+4i=(3-2)+(2+4)i=1+6i$

(2) $i^3+i^2+i+1=i^2\cdot i+i^2+i+1=-i-1+i+1=0$

(3) $(2+i)(3-5i)=6-10i+3i-5i^2=6-10i+3i-5\cdot(-1)$

$=6-10i+3i+5=11-7i$

［2］ (1) $\dfrac{4}{2+3i}=\dfrac{4(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}=\dfrac{8-12i}{4-9i^2}=\dfrac{8-12i}{13}=\dfrac{8}{13}-\dfrac{12}{13}i$

(2) $\dfrac{2i}{1-i}=\dfrac{2i(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{2i+2i^2}{1-i^2}=\dfrac{-2+2i}{2}=-1+i$

2

［1］ (1) $\sqrt{-2}\sqrt{-6}=\sqrt{2}\,i\times\sqrt{6}\,i=\sqrt{12}\,i^2=-2\sqrt{3}$

(2) $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{-3}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}\,i}=\dfrac{3}{i}=\dfrac{3i}{i^2}=-3i$

［2］ (1) $x=\pm\sqrt{-9}=\pm\sqrt{9}\,i=\pm 3i$

(2) $x=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 7\cdot 1}}{2\cdot 7}=\dfrac{2\pm\sqrt{-24}}{14}=\dfrac{2\pm\sqrt{24}\,i}{14}=\dfrac{2\pm 2\sqrt{6}\,i}{14}=\dfrac{1\pm\sqrt{6}\,i}{7}$

（別解） $x=\dfrac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-7\cdot 1}}{7}=\dfrac{1\pm\sqrt{-6}}{7}=\dfrac{1\pm\sqrt{6}\,i}{7}$

3

［1］ 判別式を D とする。

(1) $D=(-3)^2-4\cdot 2\cdot 4=9-32=-23<0$　よって，異なる２つの虚数解をもつ

(2) $D=4^2-4\cdot 3\cdot(-1)=16+12=28>0$　よって，異なる２つの実数解をもつ

(3) $D=(2\sqrt{3})^2-4\cdot 1\cdot 3=12-12=0$　よって，重解をもつ

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

［2］　判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = (-a)^2 - 1\cdot(a+2) = a^2 - a - 2 = (a-2)(a+1)$$

実数解をもつための条件は $D \geqq 0$

つまり $(a-2)(a+1) \geqq 0$　よって　$a \leqq -1,\ 2 \leqq a$

4

［1］（1）解と係数の関係より $\alpha + \beta = 1$

（2）解と係数の関係より $\alpha\beta = -5$

（3）$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 1^2 - 2\cdot(-5) = 1 + 10 = 11$

（4）$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 1^3 - 3\cdot(-5)\cdot 1 = 16$

［2］（1）2数の和は　$3 + (-2) = 1$，積は　$3\cdot(-2) = -6$

よって求める2次方程式の1つは　$x^2 - 1\cdot x - 6 = 0$　つまり　$x^2 - x - 6 = 0$

（2）2数の和は　$(-1+4i) + (-1-4i) = -2$，$(-1+4i)(-1-4i) = (-1)^2 - 16i^2 = 17$

よって求める2次方程式の1つは　$x^2 - (-2)x + 17 = 0$

つまり　$x^2 + 2x + 17 = 0$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第4講　剰余の定理と因数定理，高次方程式

1

(1)　$P(1)=1^3+3\cdot1^2-2\cdot1+4=6$

(2)　$P(-3)=(-3)^3+3(-3)^2-2(-3)+4=10$

(3)　$P\left(\dfrac{1}{2}\right)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^3+3\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-2\cdot\dfrac{1}{2}+4=\dfrac{31}{8}$

2

$P(x)=2x^3+9x^2-6x-5$　とおくと

$P(1)=2\cdot1^3+9\cdot1^2-6\cdot1-5=0$

よって　$P(x)$は$x-1$を因数にもつ。

したがって　$P(x)=(x-1)(2x^2+11x+5)=(x-1)(x+5)(2x+1)$

3

(1)

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -7 & -11 & 10 & -2 \\ & -2 & 18 & -14 & \\ \hline 1 & -9 & 7 & -4 & \end{array}$$

よって，商　x^2-9x+7　余り　-4

(2)　$P(x)=x^3+x^2-21x-45$　とおくと，

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -21 & -45 & -3 \\ & -3 & 6 & 45 & \\ \hline 1 & -2 & -15 & 0 & \end{array}$$

$P(-3)=0$

よって，$P(x)$は$x+3$　を因数にもつので

組立除法を用いると，商は　$x^2-2x-15$　となる。

したがって

$P(x)=(x+3)(x^2-2x-15)=(x+3)(x+3)(x-5)=(x+3)^2(x-5)$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

4

(1) $x^3+27=0$

$(x+3)(x^2-3x+9)=0$

よって　$x=-3,\ \dfrac{3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

(2) $x^2=t$　とおくと　$t^2-3t-4=0$　　$(t+1)(t-4)=0$

つまり　$(x^2+1)(x^2-4)=0$

よって　$x^2+1=0$　または　$x^2-4=0$

したがって　$x=2,\ -2,\ \pm i$

(3) $P(x)=x^3-3x^2-8x-4$　とおくと

1	−3	−8	−4	−1
	−1	4	4	
1	−4	−4	0	

$P(-1)=0$　より　$P(x)$は$x+1$　を因数にもつ。

よって$P(x)=(x+1)(x^2-4x-4)$

$P(x)=0$　より　$x+1=0$　または　$x^2-4x-4=0$

したがって　$x=-1,\ 2\pm2\sqrt{2}$

(4) $P(x)=x^3+4x^2-3x-18$　とおくと

1	4	−3	−18	2
	2	12	18	
1	6	9	0	

$P(2)=0$　より$P(x)$は$x-2$を因数にもつ。

よって　$P(x)=(x-2)(x^2+6x+9)$

$=(x-2)(x+3)^2$

$P(x)=0$　より　$x=2,\ -3$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第5講　点と直線

1

(1) $\dfrac{2\cdot(-3)+3\cdot5}{3+2}=\dfrac{9}{5}$

(2) $\dfrac{1\cdot(-3)+1\cdot5}{1+1}=\dfrac{-3+5}{2}=1$

(3) $\dfrac{(-3)\cdot(-3)+7\cdot5}{7-3}=11$

(4) $\dfrac{4\cdot(-3)+(-1)\cdot5}{-1+4}=-\dfrac{17}{3}$

2

(1) $\mathrm{AB}=\sqrt{(5-2)^2+\{4-(-2)\}^2}=\sqrt{3^2+6^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

(2) $\left(\dfrac{1\cdot2+2\cdot5}{2+1},\ \dfrac{1\cdot(-2)+2\cdot4}{2+1}\right)=(4,\ 2)$

(3) $\left(\dfrac{3\cdot2+(-1)\cdot5}{-1+3},\ \dfrac{3\cdot(-2)+(-1)\cdot4}{-1+3}\right)=\left(\dfrac{1}{2},\ -5\right)$

(4) $\left(\dfrac{2+5-1}{3},\ \dfrac{-2+4+3}{3}\right)=\left(2,\ \dfrac{5}{3}\right)$

3

(1) $y-1=3(x-2)$　　$y=3(x-2)+1$　　よって　$y=3x-5$

(2) 傾きが0より　$y-1=0\cdot(x-4)$　　よって　$y=1$

(3) $y-2=\dfrac{-2-2}{4-(-1)}\{x-(-1)\}$

$y=\dfrac{-2-2}{4-(-1)}\{x-(-1)\}+2$

$y=-\dfrac{4}{5}(x+1)+2$　よって　$y=-\dfrac{4}{5}x+\dfrac{6}{5}$

(4) $x=-3$

4

［1］　直線　$x+3y+1=0$　の傾きは $-\dfrac{1}{3}$

よって，この直線と平行な直線の方程式は $y=-\dfrac{1}{3}(x-5)+2$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

よって　$y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{11}{3}$

また，垂直な直線の方程式は　$y=3(x-5)+2$

よって　$y=3x-13$

［2］　(1)　$\dfrac{|3\cdot0+4\cdot0+5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{|5|}{\sqrt{25}}=\dfrac{5}{5}=1$

(2)　$\dfrac{|1\cdot1+(-2)\cdot(-3)-13|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\dfrac{|-6|}{\sqrt{5}}=\dfrac{6}{\sqrt{5}}=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第6講　円

1

［1］（1）$(x-1)^2+(y+1)^2=4$

（2）半径は $\sqrt{3^2+(-4)^2}=\sqrt{25}=5$　　よって $x^2+y^2=25$

（3）求める円の方程式を　$x^2+y^2+lx+my+n=0$　とおく。

3 点 (0, 2), (6, 0), (7, 3) を通るので

$$\begin{cases} 4+2m+n=0 \\ 36+6l+n=0 \\ 49+9+7l+3m+n=0 \end{cases} \quad \text{つまり} \quad \begin{cases} 2m+n=-4 & \cdots① \\ 6l+n=-36 & \cdots② \\ 7l+3m+n=-58 & \cdots③ \end{cases}$$

①−② より　$2m-6l=32$　　　$-3l+m=16$ …④

②−③より　$-l-3m=22$ … ⑤

④, ⑤より　$l=-7$, $m=-5$　　このとき①より $n=6$

よって求める円の方程式は　$x^2+y^2-7x-5y+6=0$

［2］$x^2+y^2+4x-8y+17=0$

$(x+2)^2-4+(y-4)^2-16+17=0$

$(x+2)^2+(y-4)^2=3$

よって，中心 $(-2, 4)$，半径 $\sqrt{3}$ の円を表す。

2

（1）$\begin{cases} x^2+y^2=5 & \cdots① \\ y=2x-5 & \cdots② \end{cases}$

②を①に代入して $x^2+(2x-5)^2=5$

$5x^2-20x+20=0$

$x^2-4x+4=0$

$(x-2)^2=0$　　$x=2$　　このとき ②より　$y=-1$

よって，共有点の個数は 1 個　　その座標は $(2, -1)$

（2）$\begin{cases} x^2+y^2=2 & \cdots① \\ y=-2x+1 & \cdots② \end{cases}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

②を①に代入して　$x^2+(-2x+1)^2=2$

$5x^2-4x-1=0$

$(5x+1)(x-1)=0$　　よって　$x=-\dfrac{1}{5},\ 1$

このとき②より

$x=-\dfrac{1}{5}$　のとき　$y=\dfrac{7}{5}$　　　$x=1$　のとき　$y=-1$

よって，共有点の個数は2個　　その座標は $\left(-\dfrac{1}{5},\ \dfrac{7}{5}\right)$，$(1,\ -1)$

(3) $\begin{cases} x^2+y^2=8 \cdots ① \\ y=x+6 \cdots ② \end{cases}$

②を①に代入して　$x^2+(x+6)^2=8$

$2x^2+12x+28=0$

$x^2+6x+14=0$

この方程式の判別式を D とすると

$\dfrac{D}{4}=3^2-1\cdot14=-5<0$

よって，共有点の個数は0個

3

$\begin{cases} x^2+y^2=5 \cdots ① \\ y=x+k \cdots ② \end{cases}$

②を①に代入して $x^2+(x+k)^2=5$

x について整理すると　$2x^2+2kx+k^2-5=0 \cdots ③$

この2次方程式の判別式を D とすると，$\dfrac{D}{4}=k^2-2\cdot(k^2-5)=-k^2+10$

(1) 円 C と直線 l が異なる2点で交わるのは　$D>0$　のとき

よって　$-k^2+10>0$　　$k^2<10$

したがって　$-\sqrt{10}<k<\sqrt{10}$

(2) 円 C と直線 l が接するのは $D=0$ のとき

よって　$-k^2+10=0$　　$k^2=10$

したがって　$k=\pm\sqrt{10}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

（別解）　円 C の半径 r は $r=\sqrt{5}$

円 C の中心$(0,\ 0)$と直線 $l: x-y+k=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|1\cdot 0-1\cdot 0+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{2}}$$

(1)　円 C と直線 l が異なる 2 点で交わるのは $d<r$ のとき

よって $\dfrac{|k|}{\sqrt{2}}<\sqrt{5}$　　$|k|<\sqrt{10}$

したがって $-\sqrt{10}<k<\sqrt{10}$

(2)　円 C と直線 l が接するのは $d=r$ のとき

よって $\dfrac{|k|}{\sqrt{2}}=\sqrt{5}$　　$|k|=\sqrt{10}$

したがって　$k=\pm\sqrt{10}$

4

(1)　公式より $2\cdot x+1\cdot y=5$　よって　$2x+y=5$

(2)　接点を点 P $(a,\ b)$とする。

点 P における接線の方程式は　$ax+by=5$ … ①

これが点 A$(3,\ 1)$を通るので，$3a+b=5$ … ②

また，点 P は円上の点より　$a^2+b^2=5$ … ③

②より $b=-3a+5$ … ②′　これを③に代入して

$a^2+(-3a+5)^2=5$　　$10a^2-30a+20=0$

$a^2-3a+2=0$　　$(a-1)(a-2)=0$　　よって　$a=1,\ 2$

②′ より　$a=1$ のとき　$b=2$　　このとき①より　$x+2y=5$

$a=2$ のとき　$b=-1$　このとき①より　$2x-y=5$

よって，求める接線の方程式と接点の座標は

接線の方程式　$x+2y=5$　　接点の座標 $(1,\ 2)$

接線の方程式　$2x-y=5$　　接点の座標 $(2,\ -1)$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第7講　軌跡と領域

1

点Pの座標を$(x,\ y)$とする。

$$\mathrm{AP}=\sqrt{(x-2)^2+(y-5)^2}$$

$$\mathrm{BP}=\sqrt{(x-6)^2+(y-3)^2}$$

点Pの満たす条件は $\mathrm{AP}=\mathrm{BP}$

つまり　$\mathrm{AP}^2=\mathrm{BP}^2$　より

$$(x-2)^2+(y-5)^2=(x-6)^2+(y-3)^2$$

展開して整理すると $y=2x-4$

よって，点Pは 直線 $y=2x-4$ 上にある。

逆に，直線 $y=2x-4$ 上のすべての点は，条件 $\mathrm{AP}=\mathrm{BP}$ を満たす。

したがって，求める点Pの軌跡は 直線 $y=2x-4$

2

(1)　点Pの座標を$(x,\ y)$とする。

点Pの満たす条件は $\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2=20$ より

$$\{(x-4)^2+y^2\}+\{(x+2)^2+y^2\}=20$$

$$x^2-8x+16+y^2+x^2+4x+4+y^2=20$$

$$2x^2+2y^2-4x=0$$

$$x^2+y^2-2x=0$$

$$(x-1)^2+y^2=1$$

ゆえに，点Pは円 $(x-1)^2+y^2=1$ 上にある。

逆に，この円上のすべての点は条件を満たす。

したがって，求める点Pの軌跡は

中心$(1,\ 0)$，半径1の円 である。

(2)　点Qの座標を$(x,\ y)$とする。

点Qの満たす条件は　$\mathrm{AQ}:\mathrm{BQ}=2:1$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

つまり　AQ = 2BQ　より　$AQ^2 = 4BQ^2$

$(x-4)^2 + y^2 = 4\{(x+2)^2 + y^2\}$

$x^2 - 8x + 16 + y^2 = 4(x^2 + 4x + 4 + y^2)$

$x^2 + y^2 + 8x = 0$

$(x+4)^2 + y^2 = 16$

ゆえに，点Ｑは円　$(x+4)^2 + y^2 = 16$　上にある。

逆に，この円上のすべての点は条件を満たす。

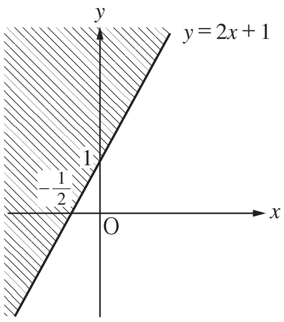
したがって，求める点Ｑの軌跡は

中心 $(-4,\ 0)$，半径４の円 である。

3

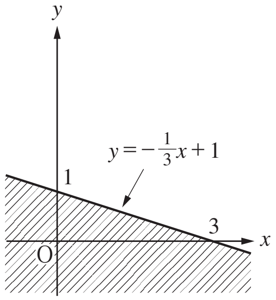
下図斜線部分

(1)



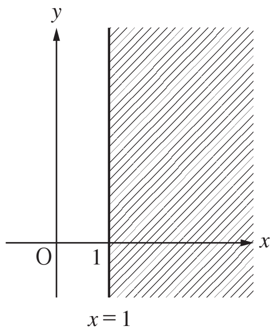
境界線を含まない

(2)



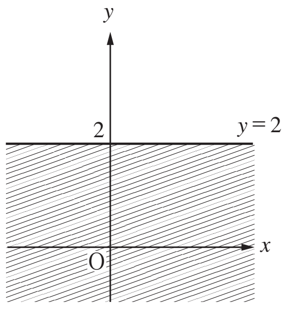
境界線を含む

(3)



境界線を含む

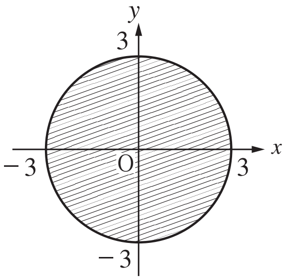
(4)



境界線を含まない

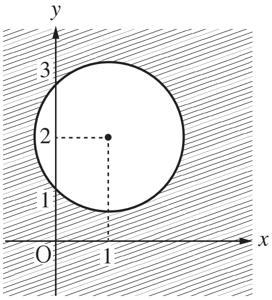
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(5)



境界線を含まない

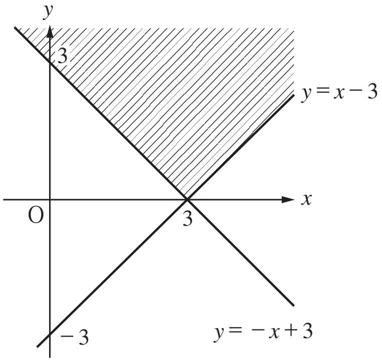
(6)



境界線を含む

4

(1) $\begin{cases} x+y-3>0 \cdots ① \\ x-y-3<0 \cdots ② \end{cases}$ とする。



①より　$y>-x+3$

よって①の表す領域は，直線　$y=-x+3$　の上側

②より $y>x-3$

よって②の表す領域は，直線　$y=x-3$　の上側

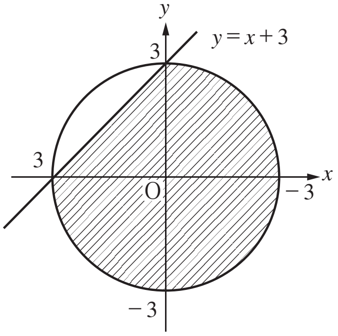
また2直線　$y=-x+3$　と　$y=x-3$　の交点の座標は

(3，0) である。

よって，求める領域は右図斜線部分。

境界線を含まない。

(2) $\begin{cases} x^2+y^2 \leqq 9 \cdots ① \\ y \leqq x+3 \cdots ② \end{cases}$ とする。



①の表す領域は，円 $x^2+y^2=9$ とその内部

②の表す領域は，直線 $y=x+3$ とその下側

また，円 $x^2+y^2=9$ と直線 $y=x+3$ の交点の座標は

$(-3,\ 0)$と$(0,\ 3)$である。

よって，求める領域は右図斜線部分。

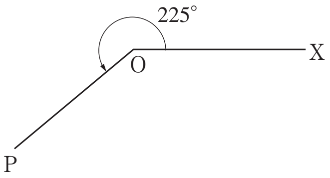
境界線を含む。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

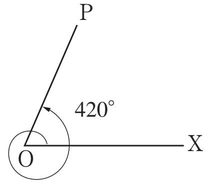
第8講　三角関数とその性質

1

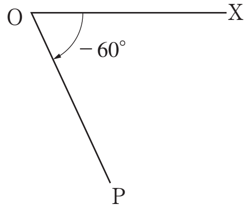
(1)



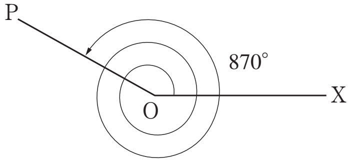
(2)



(3)



(4)



60° の動径と同じ位置にあるものは(2)。

2

［1］ (1) $30° = \dfrac{\pi}{180} \times 30 = \dfrac{\pi}{6}$　　(2) $495° = \dfrac{\pi}{180} \times 495 = \dfrac{11}{4}\pi$

(3) $-120° = -\dfrac{\pi}{180} \times 120 = -\dfrac{2}{3}\pi$

［2］ (1) $\dfrac{5}{12}\pi = \dfrac{5}{12} \times 180° = 75°$　　(2) $-\dfrac{2}{3}\pi = -\dfrac{2}{3} \times 180° = -120°$

(3) $\dfrac{3}{2}\pi = \dfrac{3}{2} \times 180° = 270°$

［3］ $l = 6 \times \dfrac{3}{5}\pi = \dfrac{18}{5}\pi$ (cm)，　$S = \dfrac{1}{2} \cdot 6^2 \cdot \dfrac{3}{5}\pi = \dfrac{54}{5}\pi$ (cm²)

3

(1) $\sin\dfrac{4}{3}\pi = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$， $\cos\dfrac{4}{3}\pi = -\dfrac{1}{2}$，　$\tan\dfrac{4}{3}\pi = \sqrt{3}$

(2) $\sin\dfrac{11}{6}\pi = -\dfrac{1}{2}$， $\cos\dfrac{11}{6}\pi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，　$\tan\dfrac{11}{6}\pi = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(3) $\sin\left(-\dfrac{7}{4}\pi\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$， $\cos\left(-\dfrac{7}{4}\pi\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$， $\tan\left(-\dfrac{7}{4}\pi\right) = 1$

(4) $\sin\dfrac{3}{2}\pi = -1$， $\cos\dfrac{3}{2}\pi = 0$， $\tan\dfrac{3}{2}\pi$ の値はない

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

4

(1)　$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$

θ が第 4 象限の角より，$\sin\theta < 0$　　よって $\sin\theta = -\frac{4}{5}$

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \left(-\frac{4}{5}\right) \div \frac{3}{5} = -\frac{4}{3}$

(2)　$1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$　より　$\frac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta = 1 + 3^2 = 10$

よって，$\cos^2\theta = \frac{1}{10}$

θ が第 3 象限の角より，$\cos\theta < 0$

よって，$\cos\theta = -\sqrt{\frac{1}{10}} = -\frac{1}{\sqrt{10}}$

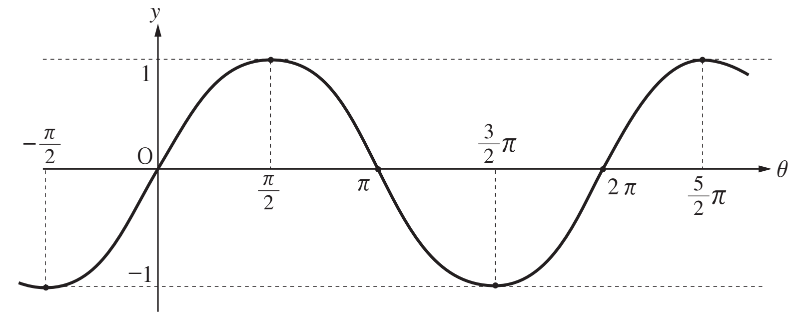
$\sin\theta = \tan\theta\cos\theta = 3\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = -\frac{3}{\sqrt{10}}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

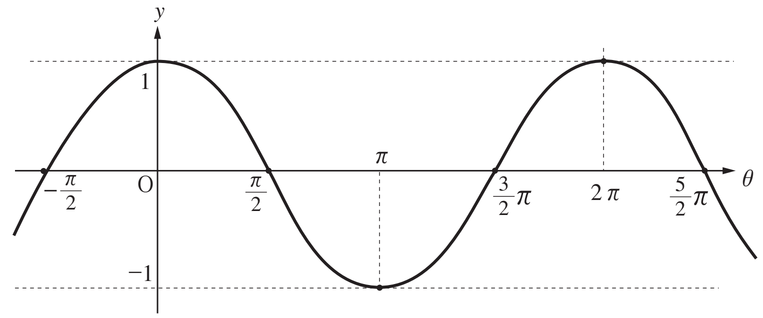
第9講　三角関数のグラフ，方程式と不等式

1

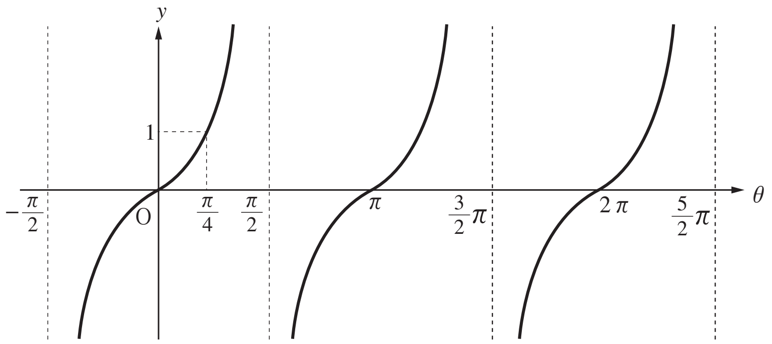
(1)



(2)



(3)



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

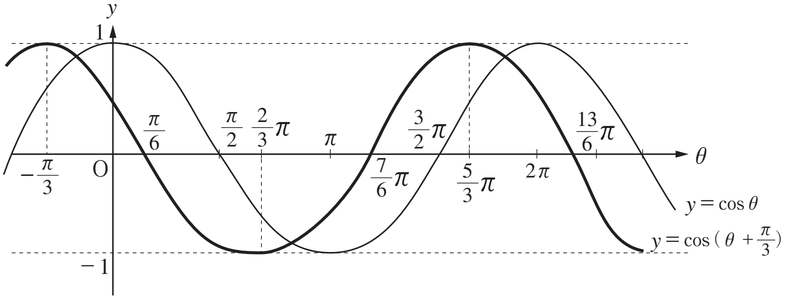
2

［1］ (1)　ア　②　　イ　③　　ウ　⑤

(2)　エ　①　　オ　④　　カ　⑥

(3)　キ　⑤

［2］



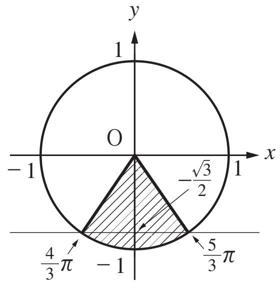
周期は2π

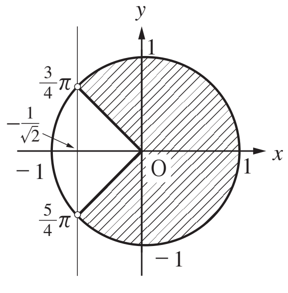
3

(1)　$\theta=\frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$　　(2)　$\theta=\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi$　　(3)　$\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{7}{6}\pi$

4

(1)　下図より $\frac{4}{3}\pi\leqq\theta\leqq\frac{5}{3}\pi$　　(2)　下図より　$0\leqq\theta<\frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi<\theta<2\pi$





©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第10講　加法定理

1

α は第１象限の角より，$\cos\alpha > 0$

よって，$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$

β は第３象限の角より，$\sin\beta < 0$

よって，$\sin\beta = -\sqrt{1-\cos^2\beta} = -\sqrt{1-\left(-\frac{12}{13}\right)^2} = -\frac{5}{13}$

(1)　$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{12}{13}\right) + \frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{5}{13}\right) = -\frac{63}{65}$

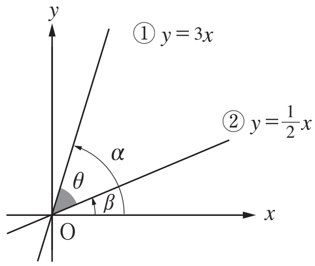
(2)　$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{12}{13}\right) - \frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{5}{13}\right) = -\frac{16}{65}$

(3)　$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta = \frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{12}{13}\right) - \frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{5}{13}\right) = -\frac{33}{65}$

(4)　$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{12}{13}\right) + \frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{5}{13}\right) = -\frac{56}{65}$

2

(1)　$\tan\alpha = 3$，$\tan\beta = \frac{1}{2}$



(2)　$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} = \frac{3+\frac{1}{2}}{1-3\cdot\frac{1}{2}} = \frac{6+1}{2-3} = -7$

(3)　$\tan\theta = \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} = \frac{3-\frac{1}{2}}{1+3\cdot\frac{1}{2}} = \frac{6-1}{2+3} = 1$

よって $\theta = \frac{\pi}{4}$

3

(1)　$0 < \alpha < \pi$ より，$\sin\alpha > 0$

よって　$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\left(-\dfrac{3}{5}\right) = -\dfrac{24}{25}$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \left(-\dfrac{3}{5}\right)^2 - \left(\dfrac{4}{5}\right)^2 = -\dfrac{7}{25}$

(2)　$0 < \alpha < \pi$　より $0 < \dfrac{\alpha}{2} < \dfrac{\pi}{2}$　　よって $\sin\dfrac{\alpha}{2} > 0$，$\cos\dfrac{\alpha}{2} > 0$

$\sin^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{2} = \dfrac{1-\left(-\dfrac{3}{5}\right)}{2} = \dfrac{5+3}{10} = \dfrac{4}{5}$　　よって $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

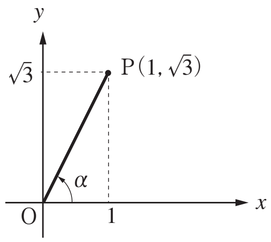
$\cos^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1+\cos\alpha}{2} = \dfrac{1+\left(-\dfrac{3}{5}\right)}{2} = \dfrac{5-3}{10} = \dfrac{1}{5}$　　よって $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

4

［1］　(1)　点 $P(1,\ \sqrt{3})$ をとると，$OP = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$

線分 OP と x 軸の正の向きのなす角を α とすると　$\alpha = \dfrac{\pi}{3}$

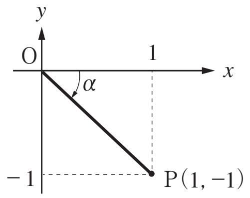
よって，$\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta = 2\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right)$



(2)　点 $P(1,\ -1)$をとると，$OP = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

線分 OP と x 軸の正の向きのなす角を α とすると　$\alpha = -\dfrac{\pi}{4}$

よって，$\sin\theta - \cos\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)$



［2］　$\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta = 2\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right)$　より

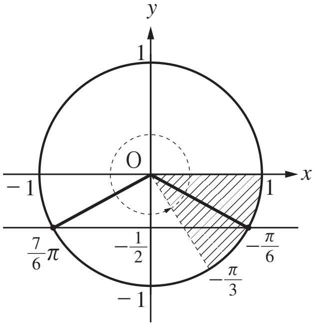
$\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta = -1$　は　$2\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right) = -1$　つまり　$\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}$

と変形できる。

$0 \leqq \theta < 2\pi$　より　$-\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta - \dfrac{\pi}{3} < \dfrac{5}{3}\pi$

よって，$\theta - \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{7}{6}\pi$

したがって，$\theta = \dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{3}{2}\pi$



第11講　指数法則と計算，指数関数のグラフ

1

(1) $a^5 \times a^{-3} = a^{5-3} = a^2$

(2) $a^{-6} \div a^{-2} \times a^4 = a^{-6-(-2)+4} = a^{-6+2+4} = a^0 = 1$

(3) $(a^{-3})^{-4} = a^{(-3)\times(-4)} = a^{12}$

(4) $(a^4 b^{-3})^{-2} = a^{4\times(-2)} b^{(-3)\times(-2)} = a^{-8} b^6 = \dfrac{b^6}{a^8}$

2

(1) $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{2^3\times3} = 2\sqrt[3]{3}$

(2) $\sqrt[4]{5}\times\sqrt[4]{125} = \sqrt[4]{5\times125} = \sqrt[4]{5^4} = 5$

(3) $\dfrac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[4]{\dfrac{32}{2}} = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$

(4) $(\sqrt[6]{9})^3 = \sqrt[6]{9^3} = \sqrt[6]{(3^2)^3} = \sqrt[6]{3^6} = 3$

(5) $\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3\times2]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$

3

［1］(1) $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{(2^3)^2} = \sqrt[3]{2^6} = 4$

(2) $9^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{9^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{9}} = \dfrac{1}{3}$

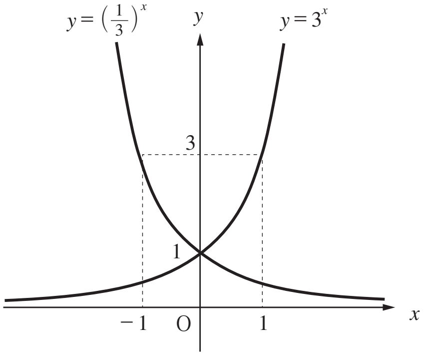
［2］(1) $3^{\frac{3}{4}} \times 3^{\frac{2}{3}} \div 3^{\frac{5}{12}} = 3^{\frac{3}{4}+\frac{2}{3}-\frac{5}{12}} = 3^{\frac{9+8-5}{12}} = 3^1 = 3$

(2) $\left(8^{-\frac{3}{5}}\right)^{\frac{5}{9}} = 8^{\left(-\frac{3}{5}\right)\times\frac{5}{9}} = 8^{-\frac{1}{3}} = (2^3)^{-\frac{1}{3}} = 2^{3\times\left(-\frac{1}{3}\right)} = 2^{-1} = \dfrac{1}{2}$

(3) $\sqrt[3]{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt[6]{5} = 5^{\frac{1}{3}} \times 5^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{6}} = 5^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}} = 5^{\frac{2+3+1}{6}} = 5^1 = 5$

(4) $\sqrt[6]{32} \times \dfrac{1}{\sqrt{2}} \div \sqrt[3]{2} = (2^5)^{\frac{1}{6}} \times 2^{-\frac{1}{2}} \times 2^{-\frac{1}{3}} = 2^{\frac{5}{6}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = 2^{\frac{5-3-2}{6}} = 2^0 = 1$

4



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第12講　指数を含む方程式・不等式，対数の性質と計算

1

(1)　$9^x = 243$

$3^{2x} = 3^5$

よって　$2x = 5$　　したがって　$x = \dfrac{5}{2}$

(2)　$32^x = \dfrac{1}{16}$

$2^{5x} = 2^{-4}$

よって　$5x = -4$　　したがって　$x = -\dfrac{4}{5}$

(3)　$4^x + 2^x - 2 = 0$

$4^x = 2^{2x} = (2^x)^2$　より

$(2^x)^2 + 2^x - 2 = 0$

$2^x = t$　とおくと，$t > 0$　であり

$t^2 + t - 2 = 0$

$(t + 2)(t - 1) = 0$

$t > 0$　より　$t = 1$

よって，$2^x = 1$　より　$x = 0$

2

[1]　$\dfrac{1}{9} = \dfrac{1}{3^2} = 3^{-2}$，　$\sqrt[4]{27} = (3^3)^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{3}{4}}$，　$1 = 3^0$

指数の大小について　$-2 < 0 < \dfrac{3}{4}$

底3は1より大きいから　$3^{-2} < 3^0 < 3^{\frac{3}{4}}$　　つまり　$\dfrac{1}{9} < 1 < \sqrt[4]{27}$

[2]　(1)　$4^x < 64$

$2^{2x} < 2^6$

底2は1より大きいから　$2x < 6$　よって $x < 3$

(2)　$\left(\dfrac{1}{9}\right)^x \geqq \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-2}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} \geqq \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}$$

底 $\frac{1}{3}$ は 0 より大きく 1 より小さいから $2x \leqq x-2$　よって　$x \leqq -2$

3

［1］（1）$\log_2 64 = 6$　（2）$\log_3 \frac{1}{9} = -2$　（3）$\log_9 3 = \frac{1}{2}$

［2］（1）$\log_{10}1000 = \log_{10}10^3 = 3$

（2）$\log_3\sqrt{3} = \log_3 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

（3）$\log_4\frac{1}{16} = \log_4\frac{1}{4^2} = \log_4 4^{-2} = -2$

4

（1）$\log_8 2 + \log_8 32 = \log_8(2\times 32) = \log_8 64 = \log_8 8^2 = 2$

（2）$\log_5 6 - \log_5 30 = \log_5\frac{6}{30} = \log_5\frac{1}{5} = \log_5 5^{-1} = -1$

（3）$3\log_2\sqrt[3]{6} - \log_2 3 = \log_2\left(6^{\frac{1}{3}}\right)^3 - \log_2 3 = \log_2 6^{\frac{1}{3}\times 3} - \log_2 3 = \log_2 6 - \log_2 3$

$= \log_2\frac{6}{3} = \log_2 2 = 1$

（4）$\log_3\frac{\sqrt{6}}{3} + 2\log_3\sqrt{3} - \frac{1}{2}\log_3 6 = \log_3\frac{\sqrt{6}}{3} + \log_3\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2 - \log_3 6^{\frac{1}{2}}$

$= \log_3\frac{\sqrt{6}}{3} + \log_3 3 - \log_3\sqrt{6}$

$= \log_3\frac{\sqrt{6}\times 3}{3\times\sqrt{6}} = \log_3 1 = 0$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第13講　底の変換，対数関数のグラフと方程式・不等式，常用対数

1

［1］（1）$\log_{16}8=\dfrac{\log_2 8}{\log_2 16}=\dfrac{\log_2 2^3}{\log_2 2^4}=\dfrac{3}{4}$

（2）$\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{27}=\dfrac{\log_3\sqrt{27}}{\log_3\dfrac{1}{3}}=\dfrac{\log_3 3^{\frac{3}{2}}}{\log_3 3^{-1}}=\dfrac{\dfrac{3}{2}}{-1}=-\dfrac{3}{2}$

［2］（1）$\log_2 5\cdot\log_5 32=\log_2 5\times\dfrac{\log_2 32}{\log_2 5}=\log_2 32=\log_2 2^5=5$

（2）$\log_9 49-\log_3 63=\dfrac{\log_3 49}{\log_3 9}-\log_3 63$

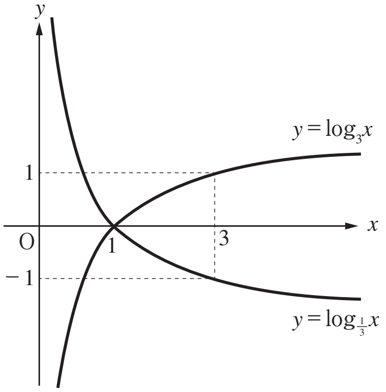
$=\dfrac{\log_3 7^2}{2}-\log_3 63$

$=\dfrac{1}{2}\log_3 7^2-\log_3 63$

$=\log_3(7^2)^{\frac{1}{2}}-\log_3 63$

$=\log_3 7-\log_3 63=\log_3\dfrac{7}{63}=\log_3\dfrac{1}{9}=-2$

2



3

［1］$\log_9 4=\dfrac{\log_3 4}{\log_3 9}=\dfrac{1}{2}\log_3 4=\log_3 4^{\frac{1}{2}}=\log_3 2$，　$0=\log_3 1$，　$1=\log_3 3$

真数の大小について　$\dfrac{1}{2}<1<2<3$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

底 3 は 1 より大きいから　$\log_3 \frac{1}{2} < \log_3 1 < \log_3 2 < \log_3 3$

よって　$\log_3 \frac{1}{2} < 0 < \log_9 4 < 1$

［2］（1）真数は正であることから　$x-1>0$　つまり　$x>1 \cdots$ ①

$\log_2(x-1)=4$　より　$x-1=2^4$　　$x-1=16$　　$x=17$

①から　$x=17$

（2）真数は正であることから　$x>0$　かつ　$x+2>0$　よって　$x>0 \cdots$ ①

方程式を変形して　$\log_2 x(x+2)=\log_2 2^3$

よって　$x(x+2)=2^3$　　$x^2+2x-8=0$　　$(x-2)(x+4)=0$

①から　$x=2$

（3）真数は正であることから　$x>0 \cdots$ ①

不等式を変形して　$\log_{\frac{1}{3}} x \geqq \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^3$　　つまり　$\log_{\frac{1}{3}} x \geqq \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27}$

底 $\frac{1}{3}$ は 0 より大きく 1 より小さいから　$x \leqq \frac{1}{27} \cdots$ ②

①，②より　$0 < x \leqq \frac{1}{27}$

4

［1］$\log_{10}15=\log_{10}(3\times 5)=\log_{10}3+\log_{10}5$

$=\log_{10}3+\log_{10}\frac{10}{2}$

$=\log_{10}3+1-\log_{10}2$

$=0.4771+1-0.3010=1.1761$

［2］2^{30} の常用対数をとると

$\log_{10}2^{30}=30\log_{10}2=30\times 0.3010=9.03$

よって　$9<\log_{10}2^{30}<10$　より

$\log_{10}10^9<\log_{10}2^{30}<\log_{10}10^{10}$

したがって　$10^9<2^{30}<10^{10}$　より，2^{30} は 10 桁の数

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

確認テスト解答

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第1講　確認テスト

1 次の[　　]に当てはまる数を答えよ。

(1) $(2x-3)^3 = 8x^3 -$ [アイ] $x^2 +$ [ウエ] $x - 27$

(2) $x^3 + 64 = (x+4)(x^2 -$ [オ] $x + 16)$

2 $(3x+2y)^5$ の展開式における x^2y^3 の係数は [カキク] である。

3 整式 $2x^3 + x^2 - 2x - 8$ を整式 $x-2$ で割ったときの商は [ケ] $x^2 +$ [コ] $x +$ [サ]，余りは [シ] である。

4 次の計算をしなさい。

(1) $\dfrac{x^2-2x-15}{x^2+2x-8} \times \dfrac{x-2}{x+3} = \dfrac{x - \boxed{ス}}{x + \boxed{セ}}$

(2) $\dfrac{5}{x^2-x-6} - \dfrac{4}{x^2-4} = \dfrac{\boxed{ソ}}{(x - \boxed{タ})(x-3)}$

｛解答｝

1 (1) ア　3　　イ　6　　ウ　5　　エ　4　　(2) オ　4

2 カ　7　　キ　2　　ク　0

3 ケ　2　　コ　5　　サ　8　　シ　8

4 (1) ス　5　　セ　4　　(2) ソ　1　　タ　2

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第2講　確認テスト

1 等式 $2x^2+3x+4=a(x+2)^2+b(x+2)+c$ が x についての恒等式となるのは

$a=$ ［ア］，$b=-$ ［イ］，$c=$ ［ウ］ のときである。

2 $a+b=1$ のとき，等式 $a^2+b^2+1=2(a+b-ab)$ を証明する。

$a+b=1$ より，$b=1-a$

このとき，（左辺）＝ ［エ］ $(a^2-a+$ ［オ］ $)$，（右辺）＝ ［カ］ $(a^2-a+$ ［キ］ $)$ より

$a^2+b^2+1=2(a+b-ab)$

3 $a>b$ のとき，不等式 $4a-3b>2a-b$ を証明する。

$(4a-3b)-(2a-b)=$ ［ク］ $(a-b)$

$a>b$ より ［ク］ $(a-b)>0$

よって $(4a-3b)-(2a-b)>0$

したがって　$4a-3b>2a-b$

4 $a>0$ のとき，不等式 $a+\dfrac{9}{a}\geqq 6$ を証明する。

$a>0$，$\dfrac{9}{a}>0$ より，（相加平均）≧（相乗平均）から

$$a+\frac{9}{a}\geqq \boxed{ケ}\sqrt{a\cdot\frac{9}{a}}=\boxed{ケ}\cdot\boxed{コ}=\boxed{サ}$$

よって $a+\dfrac{9}{a}\geqq 6$

等号が成り立つのは $a=\dfrac{9}{a}$ のときで，$a>0$ より $a=$ ［シ］ のときである。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

1	ア　2	イ　5	ウ　6	
2	エ　2	オ　1	カ　2	キ　1
3	ク　2			
4	ケ　2	コ　3	サ　6	シ　3

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第3講　確認テスト

1　次の計算をせよ。

(1)　$(2+4i)-(1-i)=$ ア $+$ イ i

(2)　$\dfrac{i}{2+i}=\dfrac{\text{ウ}}{\text{エ}}+\dfrac{\text{オ}}{\text{エ}}i$

2　(1)　$\sqrt{-3}\sqrt{-12}=$ カキ である。

(2)　次の2次方程式を解け。

(i)　$x^2=-3$　　　$x=\pm\sqrt{\text{ク}}\,i$

(ii)　$3x^2+2x+5=0$　　　$x=\dfrac{-\text{ケ}\pm\sqrt{\text{コサ}}\,i}{3}$

3　2次方程式 $x^2-mx+2m-3=0$ が異なる2つの虚数解をもつとき，m のとりうる値の範囲は シ $< m <$ ス である。

4　2次方程式 $x^2-3x+5=0$ の2解を α，β とするとき，$\alpha+\beta=$ セ，$\alpha\beta=$ ソ，$\alpha^2+\beta^2=$ タチ である。

{ 解答 }

1　(1)　ア　1　　イ　5　　(2)　ウ　1　　エ　5　　オ　2

2　(1)　カ　－　　キ　6

(2)　(i)　ク　3　　(ii)　ケ　1　　コ　1　　サ　4

3　シ　2　　ス　6

4　セ　3　　ソ　5　　タ　－　　チ　1

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第4講　確認テスト

1 $P(x) = x^3 - 3x^2 + x + 2$ を $x + 1$ で割った余りは [アイ] である。

2 $P(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$ とすると，$P(2) =$ [ウ] である。よって，因数定理より
$x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = (x - 2)(x^2 - x -$ [エ] $) = (x - 2)(x +$ [オ] $)(x -$ [カ] $)$ と
因数分解できる。

3 次の方程式を解け。

(1)　$x^3 + 8 = 0$　　$x =$ [キク]，[ケ] $\pm\sqrt{[コ]}\,i$

(2)　$x^4 + 3x^2 - 10 = 0$　　$x = \pm\sqrt{[サ]}$，$\pm\sqrt{[シ]}\,i$

(3)　$x^3 + x^2 - 3x + 1 = 0$　　$x =$ [ス]，[セソ] $\pm\sqrt{[タ]}$

{ 解答 }

1 ア　−　　イ　3

2 ウ　0　　エ　6　　オ　2　　カ　3

3 (1) キ　−　　ク　2　　ケ　1　　コ　3

(2) サ　2　　シ　5

(3) ス　1　　セ　−　　ソ　1　　タ　2

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第5講　確認テスト

1 2点 A(1, −3)，B(4, 3) について，線分 AB を 1：2 に内分する点の座標は
(ア , イウ)，4：1 に外分する点の座標は (エ , オ) である。

2 2点(6, −3)，(−4, 3)を通る直線の傾きは $-\dfrac{\text{カ}}{\text{キ}}$ である。よって，この直線の方程式は

$y=-\dfrac{\text{カ}}{\text{キ}}x+\dfrac{\text{ク}}{\text{ケ}}$ である。

3 点(2, −3)を通り，直線 $4x-3y+1=0$ に平行な直線の傾きは $\dfrac{\text{コ}}{\text{サ}}$ である。

また，垂直な直線の方程式は $y=-\dfrac{\text{シ}}{\text{ス}}x-\dfrac{\text{セ}}{\text{ソ}}$ である。

4 点(5, −2)と直線 $3x-2y-6=0$ の距離は $\sqrt{\text{タチ}}$ である。

{ 解答 }

1	ア　2	イ　−	ウ　1	エ　5	オ　5	
2	カ　3	キ　5	ク　3	ケ　5		
3	コ　4	サ　3	シ　3	ス　4	セ　3	ソ　2
4	タ　1	チ　3				

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第6講　確認テスト

1 中心が点(2, 3)，半径が 2 の円の方程式は $(x-$ ア $)^2+(y-$ イ $)^2=$ ウ である。

また，方程式 $x^2+y^2-4x-6y-12=0$ は中心が点(エ , オ)，半径 カ の円を表す。

2 円 $x^2+y^2=5$ と 直線 $y=x-1$ の共有点の座標は (キ , ク)，(− ケ , − コ) である。

3 (1) 円 $x^2+y^2=25$上の点(4, 3)における接線の方程式は サ $x+$ シ $y=25$ である。

(2) 点(1, 5)から円 $x^2+y^2=13$に引いた接線の方程式は ス $x+$ セ $y=13$と − ソ $x+$ タ $y=13$ である。

{ 解答 }

1 ア 2　イ 3　ウ 4　エ 2　オ 3　カ 5

2 キ 2　ク 1　ケ 1　コ 2

3 (1) サ 4　シ 3

(2) ス 3　セ 2　ソ 2　タ 3

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第7講　確認テスト

1　2点 A(1, 0), B(0, 2)から等しい距離にある点 P の軌跡は 直線 [ア] x − [イ] $y + 3 = 0$ である。

2　2 点 A (5, 0), B(−1, 0)からの距離の比が 2：1 である点 P の軌跡は，
中心([ウエ] , [オ]), 半径 [カ] の円である。

3　次の [　　] に当てはまるものを，下の①〜⑥から選べ。ただし同じものを選んでもよい。

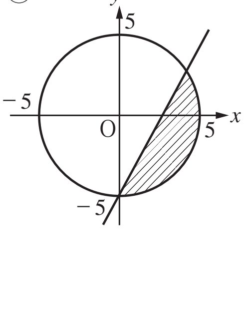
(1)　不等式 $y > x + 1$ の表す領域は，直線 $y = x + 1$ の [キ] である。
ただし境界線を [ク] 。

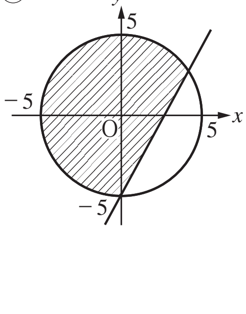
(2)　不等式 $x^2 + y^2 \leqq 4$ の表す領域は，円 $x^2 + y^2 = 4$ の [ケ] である。
ただし境界線を [コ] 。

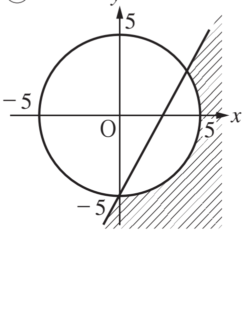
①　上側　　②　下側　　③　内部　　④　外部　　⑤　含む　　⑥　含まない

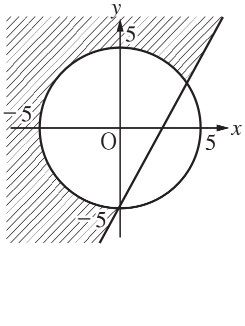
4　連立不等式 $\begin{cases} 2x - y > 5 \\ x^2 + y^2 < 25 \end{cases}$ の満たす領域は [サ] である。

[サ] に当てはまるものを，下の①〜④から選べ。

①


②


③


④


©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

｛解答｝

1　ア　2　　イ　4

2　ウ　－　　エ　3　　オ　0　　カ　4

3　(1)　キ　①　　ク　⑥　　(2)　ケ　③　　コ　⑤

4　サ　①

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第8講　確認テスト

1　次の①～④の角のうち，30° の動径と同じ位置にあるものは［ア］である。

①　150°　　②　−30°　　③　750°　　④　380°

2　(1)　120° の角を弧度法で表すと $\dfrac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}\pi$ である。

また，$\dfrac{5}{4}\pi$ を度数法で表すと［エオカ］° である。

(2)　半径 3 cm，中心角 $\dfrac{4}{9}\pi$ の扇形の弧の長さは $\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}\pi$ cm，面積は［ケ］π cm² である。

3　次の［　］にあてはまるものを，下の①～⑥からそれぞれ選べ。

(1)　$\theta = \dfrac{7}{6}\pi$ のとき　$\sin\theta =$［コ］，$\cos\theta =$［サ］

①　$\dfrac{1}{2}$　　②　$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　③　$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　④　$-\dfrac{1}{2}$　　⑤　$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　⑥　$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(2)　$\theta = \dfrac{3}{4}\pi$ のとき　$\tan\theta =$［シ］

①　$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　　②　1　　③　$\sqrt{3}$　　④　$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　　⑤　−1　　⑥　$-\sqrt{3}$

4　θ が第 2 象限の角で，$\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ のとき，$\sin\theta = \dfrac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}$，$\tan\theta = -\dfrac{\boxed{ソ}}{\sqrt{\boxed{タ}}}$ である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

1　ア　③

2　(1)　イ　2　　ウ　3　　エ　2　　オ　2　　カ　5

　(2)　キ　4　　ク　3　　ケ　2

3　(1)　コ　④　　サ　⑥　　(2)　シ　⑤

4　ス　3　　セ　4　　ソ　3　　タ　7

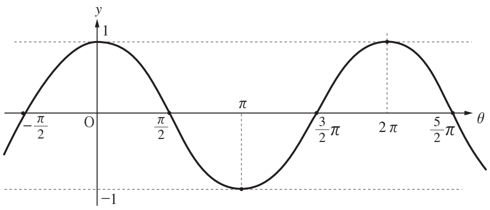
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第9講　確認テスト

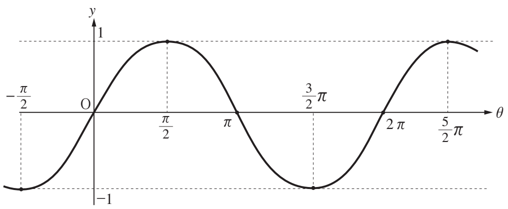
1　次の □ にあてはまるものを，下の①～③からそれぞれ選べ。

$y = \sin\theta$ のグラフは [ア]，$y = \cos\theta$ のグラフは [イ]，$y = \tan\theta$ のグラフは [ウ] である。

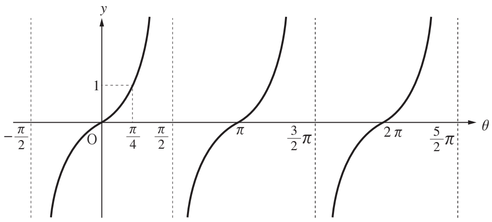
①



②



③



2　次の □ にあてはまるものを，下の①～⑧から選べ。

関数 $y = \cos 3\theta$ のグラフは，$y = \cos\theta$ のグラフを [エ] 軸方向に [オ] 倍したものである。また，その周期は [カ] である。

①　θ　　②　y　　③　3　　④　$\dfrac{1}{3}$　　⑤　$\dfrac{\pi}{3}$　　⑥　$\dfrac{2}{3}\pi$　　⑦　2π　　⑧　3π

3　$0 \leqq \theta < 2\pi$　のとき，$\sin\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす θ は　$\theta = \dfrac{[キ]}{[ク]}\pi,\ \dfrac{[ケ]}{[ク]}\pi$ である。

ただし，[キ] < [ケ] とする。

4　$0 \leqq \theta < 2\pi$　のとき，$\cos\theta \geqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす θ は　$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{[コ]},\ \dfrac{[サ]}{[コ]}\pi \leqq \theta < 2\pi$

である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

｛解答｝

1　ア　②　　イ　①　　ウ　③

2　エ　①　　オ　④　　カ　⑥

3　キ　4　　ク　3　　ケ　5

4　コ　4　　サ　7

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第10講　確認テスト

1　α は第3象限，β は第4象限の角とする。$\sin\alpha = -\dfrac{3}{5}$，$\cos\beta = \dfrac{4}{5}$ のとき，

$\cos\alpha = -\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$，$\sin\beta = -\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$ である。このとき，$\sin(\alpha+\beta) = \boxed{オ}$，

$\cos(\alpha+\beta) = -\boxed{カ}$ である。

2　2直線 $y = -4x$ …①，$y = -\dfrac{3}{5}x$ …② と x 軸の正の向きのなす角をそれぞれ α，β と

すると，$\tan\alpha = -\boxed{キ}$，$\tan\beta = -\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$ である。$\tan(\beta-\alpha) = \boxed{コ}$ より，

2直線①，②のなす角を θ とすると，$\theta = \dfrac{\pi}{\boxed{サ}}$ である。

3　$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$，$\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$ のとき，$\cos\alpha = \dfrac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}$，$\sin 2\alpha = \dfrac{\boxed{セ}\sqrt{\boxed{ソ}}}{9}$，

$\cos 2\alpha = -\dfrac{\boxed{タ}}{9}$，$\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sqrt{\boxed{チ}}}{6}$，$\cos\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sqrt{\boxed{ツテ}}}{6}$ である。

4　$\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta = \boxed{ト}\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{\boxed{ナ}}\right)$ である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

1	ア　4	イ　5	ウ　3	エ　5	オ　0
	カ　1				
2	キ　4	ク　3	ケ　5	コ　1	サ　4
3	シ　2	ス　3	セ　4	ソ　5	タ　1
	チ　6	ツ　3	テ　0		
4	ト　2	ナ　6			

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第11講　確認テスト

1　次の計算をせよ。

(1)　$a^4 \times a^{-3} \div a^{-2} = a^{\boxed{ア}}$　　(2)　$(a^{-4})^2 = a^{-\boxed{イ}} = \dfrac{1}{a^{\boxed{イ}}}$

2　次の計算をせよ。

(1)　$\sqrt[3]{8} = \boxed{ウ}$　　(2)　$\sqrt[4]{3} \times \sqrt[4]{27} = \boxed{エ}$　　(3)　$\dfrac{\sqrt[5]{64}}{\sqrt[5]{2}} = \boxed{オ}$

3　次の計算をせよ。

(1)　$2^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{1}{12}} \div 2^{\frac{3}{4}} = \boxed{カ}$　　(2)　$\sqrt[3]{27} \times \sqrt[4]{81} \div \sqrt{9} = \boxed{キ}$

4　次の $\boxed{}$ にあてはまるものを，下の①〜④から選べ。

指数関数 $y = a^x$ のグラフは，$a > 1$ のとき $\boxed{ク}$，$0 < a < 1$のとき $\boxed{ケ}$ の曲線である。

また，$\boxed{コ}$ を漸近線にもつ。

関数 $y = a^x$　のグラフと，$y = \left(\dfrac{1}{a}\right)^x$ のグラフは $\boxed{サ}$ に関して対称である。

①　右上がり　　②　右下がり　　③　x 軸　　④　y 軸

｛解答｝

1　(1)　ア　3　　(2)　イ　8

2　(1)　ウ　2　　(2)　エ　3　　(3)　オ　2

3　(1)　カ　1　　(2)　キ　3

4　ク　①　　ケ　②　　コ　③　　サ　④

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第12講　確認テスト

1 方程式 $25^x = 5$ の解は $x = \dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ である。

2 (1) 次の3つの数の大小を不等号を用いて表すと $\boxed{ウ} < \boxed{エ} < \boxed{オ}$ である。

① $\sqrt[3]{36}$　② 1　③ $\sqrt{6}$

(2) 不等式 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x \leqq \dfrac{1}{16}$ の解は $\boxed{カ}$ である。$\boxed{カ}$ にあてはまるものを

① $x \leqq 4$　② $x \geqq 4$ から1つ選べ。

3 (1) $2^3 = 8$ を $\log_a M = p$ の形で表すと $\log_2 \boxed{キ} = \boxed{ク}$ である。

(2) $\log_3 \dfrac{1}{27} = \log_3 3^{\boxed{ケコ}} = \boxed{ケコ}$ である。

4 次の計算をせよ。

(1) $\log_4 2 + \log_4 8 = \boxed{サ}$　(2) $\log_3 2 - \log_3 18 = \boxed{シス}$

(3) $\log_2 18 - 4\log_2 \sqrt{3} = \boxed{セ}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

｛解答｝

1　ア　1　　イ　2

2　(1)　ウ　②　　エ　③　　オ　①

(2)　カ　②

3　(1)　キ　8　　ク　3

(2)　ケ　－　　コ　3

4　(1)　サ　2　　(2)　シ　－　　ス　2　　(3)　セ　1

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第13講 確認テスト

1 (1) $\log_8 4 = \dfrac{\log_2 \boxed{ア}}{\log_2 \boxed{イ}} = \dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$

(2) (i) $\log_3 2 \cdot \log_2 9 = \boxed{オ}$　　(ii) $\log_8 27 - \log_2 24 = \boxed{カキ}$

2 次の $\boxed{}$ にあてはまるものを，下の①～④から選べ。

対数関数 $y = \log_a x$ のグラフは，$a > 1$ のとき $\boxed{ク}$，$0 < a < 1$ のとき $\boxed{ケ}$ の曲線である。また，$\boxed{コ}$ を漸近線にもつ。

関数 $y = \log_a x$　のグラフと，$y = \log_{\frac{1}{a}} x$ のグラフは $\boxed{サ}$ に関して対称である。

①　右上がり　　②　右下がり　　③　x 軸　　④　y 軸

3 (1) 次の3つの数の大小を不等号を用いて表すと $\boxed{シ} < \boxed{ス} < \boxed{セ}$ である。

①　$\log_{\frac{1}{3}} 5$　　②　$3\log_{\frac{1}{3}} 2$　　③　$\log_{\frac{1}{3}} 7$

(2) 次の方程式，不等式を解け。

(i) $\log_3 x = 2$　　$x = \boxed{ソ}$　　(ii) $\log_2 x < 5$　　$\boxed{タ} < x < \boxed{チツ}$

4 $\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$　とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $\log_{10} 6 = 0.\boxed{テトナニ}$ である。　　(2) 3^{30} は $\boxed{ヌネ}$ 桁の整数である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

1 (1) ア 4　イ 8　ウ 2　エ 3

(2) (i) オ 2　(ii) カ －　キ 3

2 ク ①　ケ ②　コ ④　サ ③

3 (1) シ ②　ス ③　セ ①

(2) (i) ソ 9　(ii) タ 0　チ 3　ツ 2

4 (1) テ 7　ト 7　ナ 8　ニ 1

(2) ヌ 1　ネ 5

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

高１・高2 ベーシックレベル数学ⅡＢ を受講する皆さんへ

ようこそ，『スタディサプリ』の数学の講座へ！　この講座は

「数学ⅡＢを，用語や公式を覚えるところから学習したい。」

という人にピッタリの講座です。

高１・高２の皆さんはもちろん，**それ以外の学年の人**も大歓迎です。

高校数学は，中学校で学んだ数学を理解していることが前提です。さらに，数学ⅡＢを理解するためには，数学ＩＡの理解がある程度あることが前提となります。ある分野で何かがあいまいになっていると，いきなりわからなくなってしまう，ということも少なくありません。心当たり，ありませんか？

でも，中学校の内容や数学ＩＡで理解が不足しているから，今さらもう一回聞いてもわからない！そう思うかもしれません。ところがですね，あなたが「人の話を聞いてそれを理解する力」は，以前のあなたと比べると，間違いなく「今のあなたの方が上」なのです。

あきらめるのはまだ早い。今のあなたは，以前のあなたとは違う！

この自覚が大切です。そしてその自覚をもって数学と向き合えば，高校からでも，今からでも，数学をちゃんと理解することができますよ。

また，この講座は可能な限り

中学校や数学ＩＡで学んだ公式を復習しながら，新しいところを学ぶ。

というコンセプトの元に作成されています。そして，

予習は必要なし！　「講義動画」で一から説明します！

テキストの使い方や，講座の受講の仕方については，後ほど詳しく説明します。

この講座をしっかり受講すれば，学校の授業の理解を深めることができますし，宿題もしっかりやることができるでしょう。**わかれば，面白い。面白ければ，もっとやりたくなる！**そんな自分になってみたいと思いませんか？

「人から人へ」。それは時代がどんなに進歩しても変わることがありません。直接会うことはなかなかできませんが，みなさんが真剣に動画を視聴すれば，まるで目の前に先生がいるような錯覚すら覚えることでしょう。なぜなら，先生はいつでも君たち一人ひとりが真剣に授業を受けている姿をカメラの向こうに思い浮かべながら授業しているのですから。

さぁ，そろそろ時間です。１回聞いてわからなければ，何回も受講しましょう。その先に，必ず未来は開けています。ようこそ『スタディサプリ』の世界へ！

山内　恵介

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜後編　目次＞

第５章　微分法・積分法

第14講　微分係数と導関数
§1　平均の速さと平均変化率
§2　極限値と微分係数
§3　導関数
§4　導関数の公式

第15講　接線の方程式，関数の増減と極大・極小
§1　接線の方程式
§2　曲線上にない点を通る接線
§3　関数の増減
§4　関数の極大・極小

第16講　関数の最大・最小，方程式への応用，不定積分
§1　関数の最大・最小
§2　方程式への応用
§3　不定積分
§4　不定積分の計算

第17講　定積分と面積
§1　定積分
§2　定積分の性質
§3　定積分と面積
§4　２つのグラフの間の面積

第６章　数列

第18講　数列，等差数列
§1　数列
§2　等差数列
§3　等差数列の一般項
§4　等差数列の和

第19講　等比数列，等差中項と等比中項
§1　等比数列
§2　等比数列の一般項
§3　等比数列の和
§4　等差中項と等比中項

第20講　和の記号Σ，階差数列
§1　和の記号Σ
§2　和の公式とΣの性質
§3　階差数列
§4　階差数列と一般項

第21講　数列の和と一般項，漸化式，数学的帰納法
§1　数列の和と一般項
§2　漸化式
§3　漸化式と一般項
§4　数学的帰納法

第７章　平面上のベクトル

第22講　平面上のベクトル
§1　ベクトル
§2　ベクトルの加法・減法
§3　ベクトルの実数倍と計算
§4　ベクトルの平行，ベクトルの分解

第23講　ベクトルの成分表示，内積
§1　ベクトルの成分
§2　座標と成分表示
§3　ベクトルの内積
§4　ベクトルの内積と成分

第24講　内積の利用，位置ベクトル，ベクトル方程式
§1　内積の性質とその利用
§2　位置ベクトル
§3　一直線上の点
§4　ベクトル方程式

第８章　空間のベクトル

第25講　空間のベクトル
§1　空間の座標
§2　空間のベクトル
§3　ベクトルの成分と演算，座標と成分表示
§4　ベクトルの内積となす角

第26講　空間図形とベクトル
§1　位置ベクトル
§2　一直線上にある点
§3　座標空間における線分の長さと分点の座標
§4　空間図形への内積の応用

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜高1･2 スタンダードレベル数学ⅠＡⅡＢとの対応表＞

講	ベーシックレベル講座　タイトル	スタンダードレベル講座
第１４講	微分係数と導関数	第32講　32−1・32−2
第１５講	接線の方程式，関数の増減と極大・極小	第32講　32−3・32−4 第33講　33−1・33−2・33−3
第１６講	関数の最大・最小，方程式への応用， 不定積分	第33講　33−4 第34講　34−1(1)・34−3(1)
第１７講	定積分と面積	第34講　34−3(2) 第35講　35−1・35−2
	微分法の応用（定数分離，不等式の証明）， 定積分関数，領域と面積，接線と面積	第34講　34−1(2)・34−2・34−4 第35講　35−3・35−4
第１８講	数列，等差数列	第36講　36−1・36−2・37−4
第１９講	等比数列，等差中項と等比中項	第36講　36−3・36−4
第２０講	和の記号Σ，階差数列	第37講
第２１講	数列の和と一般項，漸化式，数学的帰納法	第38講　38−1・38−2・38−3(1) 第39講　39−1
	いろいろな漸化式 数学的帰納法（不等式，漸化式） 群数列の基本	第38講　38−3(2)・38−4 第39講　39−2・39−3・39−4
第２２講	平面上のベクトル	第40講
第２３講	ベクトルの成分表示，内積	第41講
第２４講	内積の利用，位置ベクトル，ベクトル方程式	第42講 第44講　44−1・44−2
	共線条件と交点，内積と図形の性質，円を表すベクトル方程式，ベクトルと領域	第43講 第44講　44−3・44−4
第２５講	空間のベクトル	第45講
第２６講	空間図形とベクトル	第46講　46−1・46−2
	空間ベクトルの共線条件と共面条件	第46講　46−3・46−4

※「スタンダードレベル講座」は，スタディサプリ**「高１・２ スタンダードレベル数学ⅠＡⅡＢ」**の対応する講を表しています。
この「スタンダードレベル数学」を受講することで，「ベーシックレベル数学ⅡＢ」の内容を復習し，さらに理解を深めることができます。ぜひ，「スタンダードレベル数学」へ進んでください。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜講座の受講の仕方＞

ここでは，効果的な講座の受講の仕方についてお伝えします。講座は大きく「テキスト」「講義動画」「解答」に分かれています。この３つを効果的に使い，実力を伸ばしていきましょう。

① テキストについて

この講座のテキストは，講ごとに４つの §（セクション）に分かれています。

§1，§2，§3，§4 は，それぞれ次のような項目で構成されています。

「要点整理と公式」

⇒ そのセクションで習得すべき用語や要点，覚えるべき公式

「Point Pickup」

⇒「要点整理と公式」で学んだことをベースに，知識を整理

「講義問題」

⇒「要点整理と公式」「Point Pickup」で学んだことを定着させる問題

「練習問題」

⇒ 「講義問題」で学んだことを確認するための問題

「要点整理と公式」「Point Pickup」「講義問題」については，「動画」で解説を行います。それぞれの講や一部のセクションが未習，または理解が不十分でもまったく問題ありません。また，予習は必要ありません。

② 動画について

受講の準備ができましたら，テキストと筆記用具を手元におき，動画を再生してください。そして，真剣に受講して，先生がこの動画を通じて何を伝えたいのかを感じ取ってください。

それぞれの講の動画は，チャプター１からチャプター８（一部の講でチャプター９）まであります。これらのチャプターは，１つのセクションにつき２つのチャプター（一部３つのチャプター）がセットになっています。

（例）第１講　式と計算

§1 ･･･ チャプター１ & チャプター２

§2 ･･･ チャプター３ & チャプター４

§3 ･･･ チャプター５ & チャプター６

§4 ･･･ チャプター７ & チャプター８

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

それぞれのセクションにおける，主な受講の流れを説明します。

⑴　１つ目のチャプターで，**「要点整理と公式」**を解説します。このセクションで習得すべき重要な要点や，新しい公式を説明します。

必要なことはあらかじめテキストに書いてあります。その上で，一部「穴埋め」や「記述」が必要な部分があります。集中力を保ちながら先生の話に全力で耳を傾け，テキストを完成させていきましょう。

⑵　２つ目のチャプターで，**1**，**2**，**3**，**4** といった**「講義問題」**を解説します。

まずは「要点整理と公式」で習ったことを，**「Point Pickup」**でまとめます。「要点整理と公式」と同じく，一部「穴埋め」「記述」になっています。また，一部新しい知識や考え方も出てきます。

その後，「Point Pickup」で整理した知識を元に，先生が実際に問題を解いていきます。それぞれの問題が，どのようにして解答に至るかを動画でじっくり学んでください。メモをとっても構いませんが，ただ板書を書き写しても何の意味もありません。大切なのは集中して授業を受講すること。言葉の一つひとつにしっかりと耳を傾けてください。

先生の解説を聞いたあとで，見開き右側のページの**「解答」**欄に実際に自分で解いてみましょう。もちろん解説の途中で，一時停止して問題を解いても構いません。もし解いている途中で手が止まってしまったら，動画を巻き戻して見てください。

また，**「解答集」**には途中計算が書いてありますので，それを見てもよいでしょう。

「要点整理と公式」→「Point Pickup」→「問題の解説」→「自分で問題を解く」

これで１つのセクションが終了です。１つのセクションでおよそ 15 分～ 20 分です。

４つのセクションで１講分が終了します。時間がない時は，１日１セクションずつの受講で構いません。また，週末にまとめて１講分受講してもよいでしょう。

大事なのは

・「集中力」

・「集中しよう」「何かをこの先生から得てやる」という「気持ち」

・数学ができるようになりたいという「思い」

をもって受講することです。

動画に慣れていない人や，数学が苦手な人は，最初は「授業が速い！」と感じるかもしれません。この講座はいつでも画面を停止できます。また，必要に応じて何度も受講してください。受講を進めていくうちに，このペースにだんだん慣れていくでしょう。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

そして

・「やっぱり自分はできない」は厳禁！

です。あきらめず何度もチャレンジすること。必ずできるようになりますよ。

③ 復習について

その日の動画の受講が完了したら，「Point Pickup」をもう一度見てください。そして，

・このセクションから何を学んだか

を思い浮かべてみましょう。

また，後日，講義問題をもう一度解くことで，

・このセクションを受講して何ができるようになったか

を確かめてみましょう。もし解法が全然思いつかない，すっかり忘れてしまった，という場合は，もう一度そのセクションを受講することをお勧めします。

・「復習したときが，真の学習の完成」

です。

④ 確認テストについて

①～③が終わると，自分がその講の内容を本当に理解しているのか確かめたくなるはずです。各講の終わりに**「確認テスト」**を用意してあります。講義の問題に関連する問題ですので，この講で学んだことを参考に，自力で解いてみましょう。

・「自分はちゃんと理解できているのか」

それを問題を解くことで確認することができます。解き終えたら，「解答」を見て答えをチェックしてみましょう。この確認テストを解くことで，あなたの知識はさらに定着します。

以上を繰り返すことにより，飛躍的に理解が深まり，数学がだんだん解けるようになっていきます。

そして，受講を続ける上で大切なのは

・ペースを作り，守る

ことです。各セクション，およそ15分～20分。それを，どこの曜日のどの時間帯にやるかを決めましょう。そして，決めた曜日の決めた時間にしっかりと受講しましょう。学校に通う，予備校に通うのと同じように，「スタディサプリ」を受ける時間，数学から逃げずに本気で向きあう時間，これを確保してください。学校の宿題があろうと，部活で疲労し

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

ていようと，ペースを守ること。できない理由を作らないこと。それができることで，確実な「実力向上」とそれができることによる「自信」につながります。

　このベーシック講座は，あくまで基礎部分です。受講後は，**「高１・２ スタンダードレベル数学ⅠＡⅡＢ」**に進んでみてください。どの講を見ればよいのかは,「対応表」に載っています。自分の知識がどのように応用できるのか，それを知ると，もっと数学が好きになりますよ。

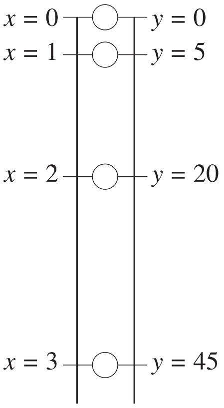
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第14講　微分係数と導関数

§1 ▶ 平均の速さと平均変化率

要点整理 と 公式

要点1　平均の速さ



　ある条件のもとで，物体が落下し始めてから x 秒後に落ちる距離を y m とすると，x と y の関係が

$$y=5x^2$$

となる。このとき

　1 秒後には $5\cdot1^2=5$(m)

　2 秒後には $5\cdot2^2=20$(m)

　3 秒後には $5\cdot3^2=45$(m)

落下する。

　このとき，落下し始めて 2 秒後から 3 秒後までの「平均の速さ」は

$$\frac{45-20}{3-2}=\frac{25}{1}=25\text{(m/s)}$$

である。

※ 落下する球の速さは，時間とともに変化する。上記の例は 2 秒後から 3 秒後までの「 1 秒間」における平均の速さを出したが，この「 1 秒間」という時間を限りなく短くしていくと，その時々における「瞬間の速さ」を求めることができ，

　2 秒後における瞬間の速さは 20 m/s

　3 秒後における瞬間の速さは 30 m/s

となる。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

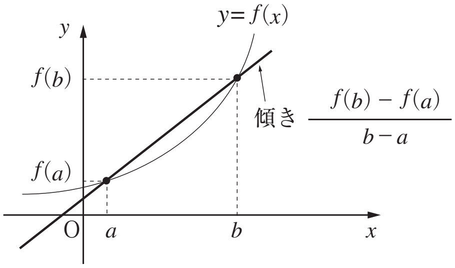
要点 2 平均変化率

関数 $f(x)$ において，x の値が a から b まで変化するとき，関数の値は $f(a)$ から $f(b)$ まで変化する。このとき，x の値の変化に対する関数 $f(x)$ の変化の割合

$$\frac{\text{　　の増加量}}{\text{　　の増加量}}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

を，$x=a$ から $x=b$ までの $f(x)$ の「　　　　　　　」という。

この平均変化率は，$y=f(x)$ のグラフ上の 2 点 A$(a,\ f(a))$，B$(b,\ f(b))$ を通る「　　　　　　　」を表している。



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1

関数 $f(x) = -3x^2$ において，x の値が次のように変化するときの関数 $f(x)$ の平均変化率を求めよ。

(1)　1 から 3 まで　　(2)　1 から $1+h$ まで

Point Pickup

平均変化率

関数 $f(x)$ において，x の値が a から b まで変化するとき

平均変化率 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\left(=\dfrac{y\text{ の増加量}}{x\text{ の増加量}}\right)$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§2 ▶ 極限値と微分係数

要点整理 と 公式

要点3 極限値

関数$f(x)$において，xがa以外の値をとりながら，限りなくaに近づくとき，$f(x)$の値が一定の値αに限りなく近づく場合，この値αをxがaに限りなく近づくときの関数$f(x)$の「　　　　」といい，次のように表す。

$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$　　または　　$x \to a$のとき$f(x) \to \alpha$

(ex) $\lim_{x \to 2}(x+1) =$

要点4 微分係数

平均変化率$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ …① において，aの値を固定し，bを限りなくaに近づけるとき，

①がある一定の値に限りなく近づくならば，その値を関数$f(x)$の$x=a$における

「　　　　　　」(または変化率) といい，「　　　　」と表す。つまり，

$$\lim_{b \to a}\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(a) \quad \cdots②$$

である。

②において，$b-a=h$とおくと，$b=a+h$となる。また，$b \to a$のとき，$h \to 0$である。このとき，微分係数②は以下のようになる。

■ 微分係数

$$f'(a) = \lim_{h \to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(ex)　$f(x)=x^2$ の $x=1$ における微分係数は

$$f'(\quad)=\lim_{h\to 0}\frac{f(\quad+h)-f(\quad)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2-1^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2h+h^2}{h}$$

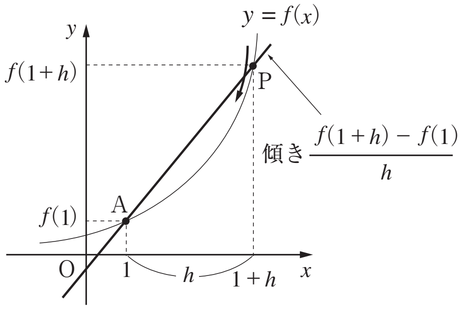
$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(2+h)}{h}=\lim_{h\to 0}(2+h)=$$

要点5 微分係数の図形的意味

関数 $f(x)$において，$\mathrm{A}(1,\ f(1))$，$\mathrm{P}(1+h,\ f(1+h))$ とすると，直線 AP の傾きは，x が 1 から $1+h$ まで変化するときの平均変化率

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\cdots①$$

で表される。

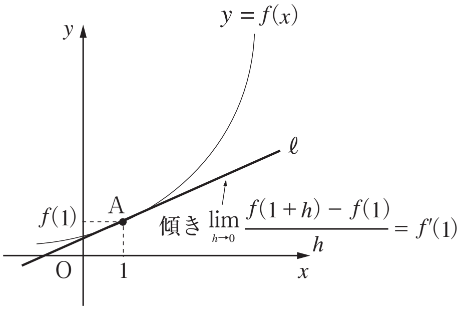


$h\to 0$ のとき，点 P は曲線 $y=f(x)$上を移動しながら限りなく点 A に近づく。このとき直線 AP の傾きは，

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

つまり，微分係数 $f'(1)$に限りなく近づく。

このとき直線 AP は，点 A を通り傾きが$f'(1)$の直線 ℓ に限りなく近づく。この直線 ℓ を，$f(x)$の点 A における「　　　　」といい，点 A を「　　　　」という。



関数 $y=f(x)$の接線の傾きについて，次のことがいえる。

■ 接線の傾きと微分係数

関数 $y=f(x)$ のグラフ上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$における接線の傾きは，微分係数$f'(a)$で表される。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2

［1］　次の極限値を求めよ。

(1)　$\lim_{x \to 0}(4+x)$　　　(2)　$\lim_{h \to 0}\dfrac{h^2-5h}{h}$

［2］　関数 $f(x)=-2x^2$ の $x=-1$ における微分係数を求めよ。

また，関数 $f(x)=-2x^2$ のグラフ上の点 $(-1,\ -2)$ における接線の傾きを求めよ。

Point Pickup

極限値

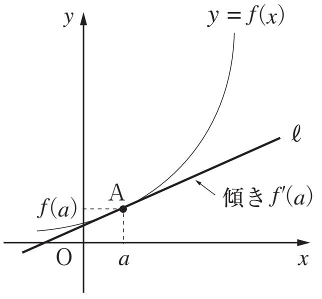
極限値　$\lim_{x \to a} f(x)$ は，$f(x)$ に $x=a$ を代入して求める。

ただし，求めた値は $f(x)$ が「限りなく近づく値」である。

微分係数

$$f'(a)=\lim_{h \to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

微分係数 $f'(a)$ は，関数 $f(x)$ のグラフ上の点 $A(a,\ f(a))$ における接線の傾きに等しい。



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

｛解答｝

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§3 導関数

要点整理 と 公式

要点6 導関数

関数 $f(x)=x^2$ の $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ は

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^2-a^2}{h}$$

つまり $f'(a)=2a$ である。

$f'(a)=2a$ において，a の値を1つ決めると，それに対応して $f'(a)$ の値がただ1つ定まる。例えば，$f'(3)=2\cdot 3=6$ である。よって，$f'(a)$ は a の「　　　　」といえる。

ここで $f'(a)=2a$ において，a を x に書き換えると，$f'(x)=2x$ という x の関数ができる。

このように，関数 $f(x)$ の $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ について，a を x に書き換えることで得られる関数 $f'(x)$ を，$f(x)$ の「　　　　」という。

■ 導関数の定義

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

関数 $y=f(x)$ からその導関数 $f'(x)$ を求めることを，$f(x)$ を「　　　　　　」という。とくに変数 x を強調するときには x で微分する，という。

※ $y=f(x)$ の導関数を表すのに，$f'(x)$ のほかに y'，$\dfrac{dy}{dx}$（ディーワイ・ディーエックス）や，

$\dfrac{d}{dx}f(x)$（ディー・ディーエックス・エフエックス）といった記号も用いられる。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ において，x の変化量 h を x の「増分」といい，Δx と表す。

また，このときの y の変化量 $f(x+h)-f(x)$ を y の「増分」といい，Δy と表す。このとき，

平均変化率は　$\frac{\Delta y}{\Delta x}$

導関数は　$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ と表される。

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3

定義に従って，次の関数の導関数を求めよ。

(1)　$f(x)=x$　　(2)　$f(x)=x^2$

(3)　$f(x)=x^3$　　(4)　$f(x)=4$

Point Pickup

導関数（定義）

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§4 導関数の公式

要点整理 と 公式

要点7 関数 x^n と定数関数の導関数

関数 $f(x)=x^2$ の導関数，つまり微分した結果を表すとき，$(x^2)'$ と書くことがある。

この記号を用いると，x，x^2，x^3 を微分した結果はそれぞれ，

$(x)'=1$,　　$(x^2)'=2x$,　　$(x^3)'=3x^2$

と表すことができる。c を定数とするとき，$f(x)=c$（定数関数）を微分した結果は

$(c)'=0$

と表すことができる。

一般に，次のことがいえる。

■ 関数 x^n と定数関数の導関数

n を正の整数，c を定数とするとき

$(x^n)'=nx^{n-1}$　　　　$(c)'=0$

(ex) $(x^4)'=$

要点8 導関数の性質

関数 $f(x)=4x^2$ を微分すると，次のようになる。

$$f'(x)=(4x^2)'=\lim_{h\to 0}\frac{4(x+h)^2-4(x)^2}{h}=\lim_{h\to 0}4\left\{\frac{(x+h)^2-(x)^2}{h}\right\}$$

$$=\lim_{h\to 0}4(2x+h)=4\cdot 2x$$

$(x^2)'=2x$ より，$(4x^2)'=4\cdot(x^2)'$

関数 $f(x)=x^3+x^2$ を微分すると，次のようになる。

$$f'(x)=(x^3+x^2)'=\lim_{h\to 0}\frac{\{(x+h)^3+(x+h)^2\}-(x^3+x^2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{(x+h)^3-x^3}{h}+\frac{(x+h)^2-x^2}{h}\right\}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$$= \lim_{h \to 0} \{(3x^2 + 3xh + h^2) + (2x + h)\} = 3x^2 + 2x$$

$(x^3)' = 3x^2$，$(x^2)' = 2x$　より，$(x^3 + x^2)' = (x^3)' + (x^2)'$

一般に導関数の性質について，次のことがいえる。

■ 導関数の性質

k を定数とするとき

$\{kf(x)\}' = kf'(x)$

$\{f(x) + g(x)\}' = f'(x) + g'(x)$　　$\{f(x) - g(x)\}' = f'(x) - g'(x)$

(ex) 関数　$f(x) = 2x^2 - 3x - 4$　を微分すると，

$f'(x) = (2x^2 - 3x - 4)' = 2(x^2)' - 3(x)' - (4)'$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

4

関数 $f(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 2$ を微分せよ。

また，$x = 1$，$x = t$ における微分係数をそれぞれ求めよ。

Point Pickup

公式を用いた関数の微分

n を正の整数，c を定数とするとき

$(x^n)' = nx^{n-1}$　　とくに　　$(x)' = 1$,　　$(x^2)' = 2x$,　　$(x^3)' = 3x^2$

$(c)' = 0$

また，k を定数とするとき

$\{kf(x)\}' = kf'(x)$　　　$\{kf(x) \pm lg(x)\}' = kf'(x) \pm lg'(x)$　　（複号同順）

微分係数の求め方

関数 $f(x)$ の $x = a$ における微分係数 $f'(a)$ を求める手順は以下。

① $f(x)$ を微分し，導関数 $f'(x)$ を求める。

② $f'(x)$ に $x = a$ を代入する。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

｛解答｝

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第14講　確認テスト

1 関数 $f(x)=2x^2$ において，x の値が 1 から 4 まで変化するときの関数 $f(x)$ の平均変化率は［アイ］である。

2 関数 $f(x)=2x^2$ の $x=-2$ における微分係数は［ウエ］である。

3 関数 $f(x)=3x^2$ の導関数を定義に従って求めると

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\boxed{オ}\,xh+\boxed{カ}\,h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\boxed{オ}\,x+\boxed{カ}\,h\right)=\boxed{キ}\,x$$

となる。

4 関数 $f(x)=3x^3-5x^2-2x+1$ を微分すると，$f'(x)=\boxed{ク}\,x^2-\boxed{ケコ}\,x-\boxed{サ}$ となる。

よって，$x=-1$ における微分係数は $f'(-1)=\boxed{シス}$ である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ Note }

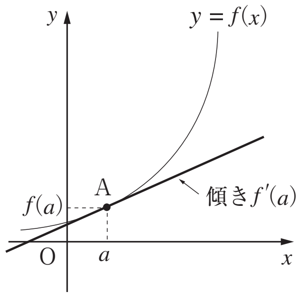
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第15講 接線の方程式，関数の増減と極大・極小

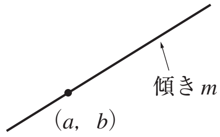
§1 接線の方程式

要点整理 と 公式

要点1 接線の方程式



関数 $y=f(x)$ のグラフ上の点 A$(a,\ f(a))$ における接線の傾きは，$x=a$ における微分係数 $f'(a)$ で表される。$f'(a)$ は，$f(x)$ を微分して得られる導関数 $f'(x)$ に $x=a$ を代入して求めることができる。



また，点 $(a,\ b)$ を通り，傾き m の直線の方程式は，
$y-b=m(x-a)$，つまり $y=m(x-a)+b$ と表される。

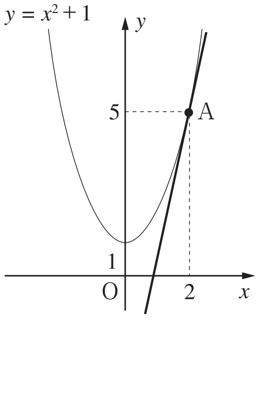
よって，次のことがいえる。

■ 接線の方程式

関数 $y=f(x)$ のグラフ上の点 A$(a,\ f(a))$ における接線の方程式は

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$

(ex) 関数 $f(x)=x^2+1$ 上の点 A$(2,\ 5)$ における接線の方程式を求める。



$f'(x)=$

よって，$f'(2)=$　　　　　より，

点 A における接線の傾きは「　」である。

したがって，点 A における接線の方程式は

$y=$　　$(x-$　　$)+$

つまり　　　　　　　　である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ メモ }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1

［1］ 関数 $y=-x^2+5x-6$ のグラフ上の点 $(1,\ -2)$ における接線の方程式を求めよ。

［2］ 曲線 $y=2x^2+3x+1$ について，傾きが -5 である接線の方程式を求めよ。

Point Pickup

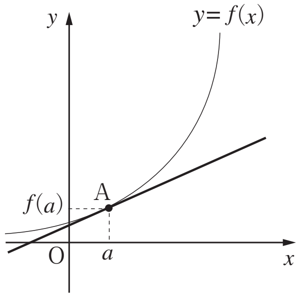
接線の方程式

関数 $y=f(x)$ のグラフ上の点 $A(a,\ f(a))$ における接線の

傾きは $f'(a)$

接線の方程式は　　$y=f'(a)(x-a)+f(a)$

である。点 $A(a,\ f(a))$ は接線の「接点」である。



接点の x 座標がわかっているとき

→　導関数 $f'(x)$ を求め，接点の x 座標を代入して接線の傾きを求めることができる。

接線の傾きがわかっているとき

→　導関数 $f'(x)$ を求め，$f'(x)=$（接線の傾き）という方程式を解くことで，接点の x 座標を求めることができる。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

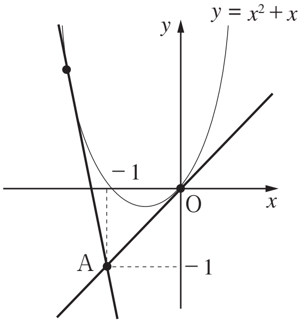
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§2 曲線上にない点を通る接線

要点整理 と 公式

要点2 曲線上にない点から引いた接線の方程式

関数 $y=x^2+x$ のグラフに，点 A$(-1,\ -1)$ から引いた接線の方程式を求める。



$f(x)=x^2+x$ とおくと，$f'(x)=$ 　　　　　である。

ここで，点 A は「接点とは限らない」ため，その x 座標 -1 を用いて接線の傾きが $f'(-1)=-1$ とすることはできない。

よって，接点の x 座標を「文字でおく」ことにより，その文字を用いて接線の傾きや接線の方程式を表し，その方程式が点 A を通るときの接点の x 座標を求める。

接点の x 座標を「　　」とおくと，接点の y 座標は　　　　　となる。

また，点 $(t,\ t^2+t)$ における接線の傾きは

$f'(\quad)=$

である。よって，点 $(t,\ t^2+t)$ における接線の方程式は

$y=(\qquad\quad)(x-\quad)+$

となる。この式を $y=mx+n$ の形に整理すると

$y=(2t+1)(x-t)+t^2+t$

つまり，$y=(2t+1)x-t^2$ …① となる。

この直線が，点 A$(-1,\ -1)$ を通るので，

$-1=(2t+1)\cdot(-1)-t^2$

つまり $t^2+2t=0$

よって $t(t+2)=0$ より $t=0,\ -2$ である。

これらが，接点の x 座標であり，①に代入することで接線の方程式を求めることができる。

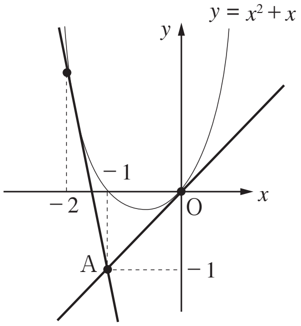
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

よって，求める接線の方程式は，①より

$t=0$ のとき

$t=-2$ のとき

である。



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2

関数　$y = -x^2 - 2x - 3$　のグラフに，点 A(0,　1) から引いた接線の方程式を求めよ。

Point Pickup

曲線上にない点から引いた接線

関数 $y = f(x)$ のグラフにおいて

・ある点 A から引いた接線

・ある点 A を通る接線

を求めるとき，点 A が「接点」であるとは限らない。よって，

接点の x 座標を「　　」などとおき，それを用いて接線の方程式を表し，

その方程式が，点 A を通るときの「 t 」を求め，接線の方程式を求めるとよい。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§3 関数の増減

要点整理 と 公式

要点3 関数の増減と増減表

$1 \leqq x \leqq 2$, $3 < x$ といった「不等式を満たす実数 x の集合」を「区間」という。

関数 $f(x)$ について，ある区間内の任意の x_1，x_2 に対して

$x_1 < x_2$　ならば　$f(x_1) < f(x_2)$

が成り立つとき，$f(x)$ はこの区間で　(単調に)「増加」するといい，

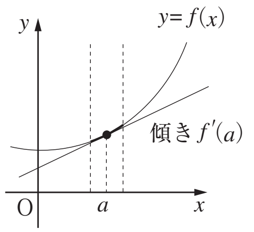
$x_1 < x_2$　ならば　$f(x_1) > f(x_2)$

が成り立つとき，$f(x)$ はこの区間で　(単調に)「減少」するという。

(ex) 関数 $y = x^2$ は

$x > 0$ の区間では増加し，$x < 0$ の区間では減少する。

関数 $y = f(x)$ のグラフ上の1点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ に近いところでは，関数のグラフは $x = a$ における接線のグラフとほとんど一致している，と考えることができる。



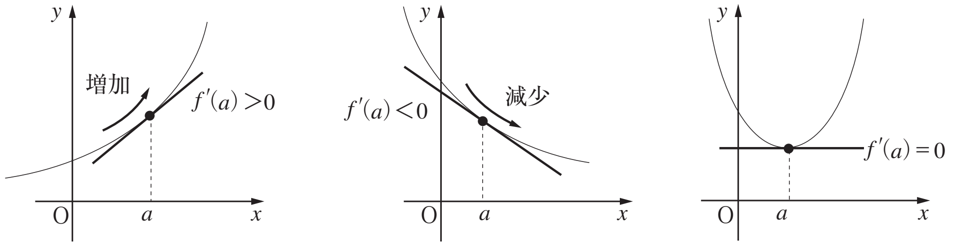
$x = a$ における接線の傾きは「　　　　」であり，$f'(a)$ の値が

正のときは「右上がり」であり，　$x = a$ の付近で $f(x)$ は「増加」

負のときは「右下がり」であり，　$x = a$ の付近で $f(x)$ は「減少」

0のときは「x 軸に平行」であり，$x = a$ の付近で $f(x)$ は「定数」(増加も減少もしない)

ということがわかる。



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

したがって，以下のことがいえる。

■ $f'(x)$ の符号と関数の増減

ある区間で

つねに $f'(x)$　　　ならば，$f(x)$ はその区間で「　　　」する

つねに $f'(x)$　　　ならば，$f(x)$ はその区間で「　　　」する

つねに $f'(x)$　　　ならば，$f(x)$ はその区間で「 定数 」である。

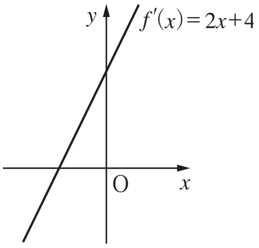
(ex)　$f(x) = x^2 + 4x$ の増減を調べる。

$f'(x) = 2x + 4$

$f'(x)$　　　となるのは，$2x + 4 = 0$ より $x = -2$

$x > -2$　のとき　$f'(x)$

$x < -2$　のとき　$f'(x)$



よって，$f'(x)$ の符号および $f(x)$ の増減は

次のような表で表される。

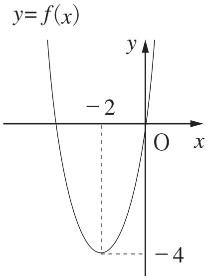
x	$\cdots$	-2	$\cdots$
$f'(x)$			
$f(x)$			

⇒

x	$\cdots$	-2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$			

⇒

x	$\cdots$	-2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-4	↗



関数の増減を表す上記のような表を「　　　　　」という。

表の記号「 ↗ 」は増加を，記号「 ↘ 」は減少を表す。

※$f(x)$ は $x > -2$ の区間で増加しているが，この区間の端を含めて $x \geqq -2$ のときも増加している，といえる。このように増加・減少の範囲については，区間の端を含めてもよく，上記の例では

$f(x)$ は $x \geqq -2$ で増加，$x \leqq -2$ で減少する

といえる。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3

次の関数の増減を調べ，増減表を作成せよ。

(1) $f(x) = x^3 - 3x^2$　　(2) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x + 2$

Point Pickup

関数の増減

関数 $y = f(x)$ の増減については，導関数の符号がカギを握る。

増減を調べる主な手順は以下。

① 導関数 $f'(x)$ を求める。

② $f'(x) = 0$ となるような実数 x を求める。

③ ②と $y = f'(x)$ のグラフを元に，$f'(x) > 0$，$f'(x) < 0$ となる x の範囲を求める。

ある区間で

つねに $f'(x) > 0$ ⇒ $f(x)$ はその区間で「　　」する

つねに $f'(x) < 0$ ⇒ $f(x)$ はその区間で「　　」する

つねに $f'(x) = 0$ ⇒ $f(x)$ はその区間で「 定数 」

④ 「増減表」に，$f'(x)$ の符号，$f(x)$ の増減（↗，↘）および値を記入する。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§4 ▶ 関数の極大・極小

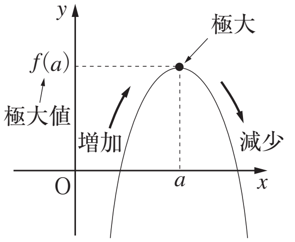
要点整理 と 公式

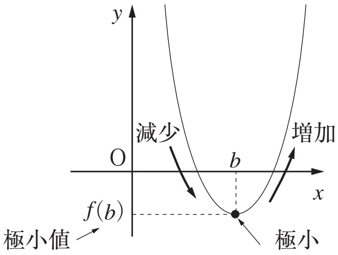
要点 4 関数の極大・極小

$y = f(x)$ において x を増加させたとき，$x = a$ の前後で $f(x)$ が増加から減少に転じるとき，$f(x)$ は $x = a$ で「　　　」であるといい，$f(a)$ を「　　　」という。

また，$x = b$ の前後で減少から増加に転じるとき，$f(x)$ は $x = b$ で「　　　」であるといい，$f(b)$ を「　　　」という。

極大値と極小値をあわせて「　　　」という。



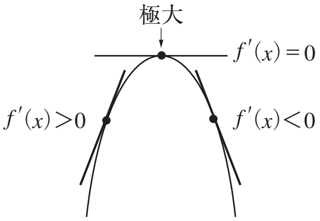


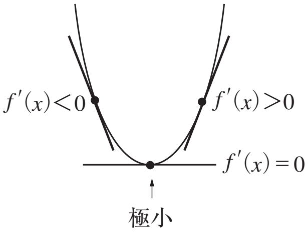
関数 $f(x)$ の値の増減は，$f'(x)$ の符号で調べることができる。ある区間で

$f'(x) > 0$　（$f'(x)$ が正）　⇒　$f(x)$ は増加

$f'(x) < 0$　（$f'(x)$ が負）　⇒　$f(x)$ は減少

である。





$f(x)$ が $x = a$ で極値をとるとき，$f'(a)$　　　である。さらに，$x = a$ の前後で $f'(x)$ の符号が入れ替わる。

よって，以下のことがいえる。

■ 関数の極大・極小

$f'(a) =$　　　となる $x = a$ の前後で

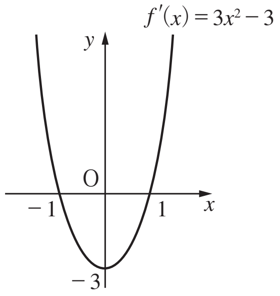
$f'(x)$ の符号が正から負に転じる　⇒　$f(a)$ は「　　　」

$f'(x)$ の符号が負から正に転じる　⇒　$f(a)$ は「　　　」

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

（ex1）$f(x) = x^3 - 3x + 2$ の増減を調べ，極値を求め，グラフをかく。

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$



$f'(x) = 0$　となるのは　$x = -1,\ 1$　のとき

よって，$f(x)$ の増減表は以下。

x	…	-1	…	1	…
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	4	↘	0	↗

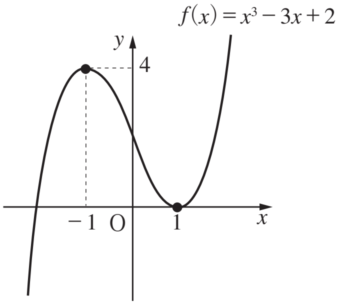
したがって

　$x =$　　　　　のとき　極大値

　$x =$　　　　　のとき　極小値

をとる。

グラフは右図。

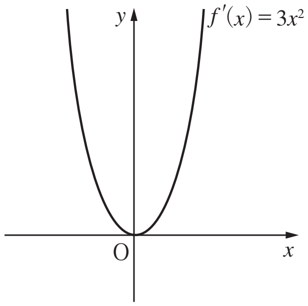


（ex2）$f(x) = x^3$　について

$f'(x) = 3x^2$

$f'(x) = 0$　となるのは　$x = 0$　のとき

よって，$f(x)$ の増減は以下。

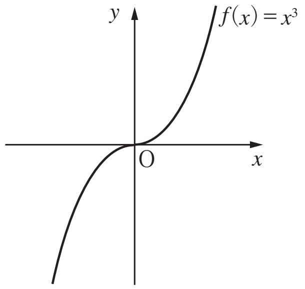


x	…	0	…
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	↗	0	↗

したがって，$f(x)$ はつねに増加し，

$x = 0$ で極値をとらない。

$y = f(x)$ のグラフは右図。



以上より，次のことがいえる。

$f'(a) = 0$ であっても，$f(a)$ が極値になるとは限らない。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

4

次の関数の増減を調べ，極値を求めよ。また，そのグラフをかけ。

(1)　$f(x) = 3x^3 - 9x^2 + 6$　　(2)　$y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 2$

Point Pickup

関数の極値とグラフ

極値を求め，グラフをかく手順は以下。

①　導関数 $f'(x)$ を求める。

②　$f'(x) = 0$　となるような実数 x を求める。この x が極値をとる x の値の候補。

③　②で求めた x の値の前後における $f'(x)$ の符号を調べ，増減表をかく。

④　②の x の値の前後で $f'(x)$ の符号変化があれば，$f(x)$ はその x において極値をとる。

　符号変化がなければ，$f(x)$ はその x において極値をとらない。

⑤　③の増減表を元に，グラフをかく。

　②の x の値において，グラフの接線が x 軸と平行となることに注意。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第15講　確認テスト

1　関数 $f(x) = -x^2 + 2x - 3$ について，$y = f(x)$ のグラフ上の点$(2,\ -3)$ における接線の傾きは［アイ］であり，接線の方程式は $y =$［アイ］$x +$［ウ］である。

2　関数　$y = x^2 + 1$ のグラフに点 $(2,\ 1)$から引いた接線の方程式を求める。接点の x 座標を $x = t$ とおくと，接線の傾きは［エ］t であり，接線の方程式は

$y =$［エ］$tx - t^2 +$［オ］と表される。この接線が点 $(2,\ 1)$ を通るとき，$t = 0,$［カ］となる。したがって，求める接線の方程式は $y = 1$，$y =$［キ］$x -$［クケ］である。

3　関数　$f(x) = x^3 - 3x$ の増減を調べ，下の増減表を完成せよ。

ただし［ス］～［ツ］は，次の①～④の中から選び，数字で答えよ（同じものを選んでもよい）。

①　＋　　②　－　　③　↗　　④　↘

x	…	コサ	…	シ	…
$f'(x)$	ス	0	セ	0	ソ
$f(x)$	タ	2	チ	-2	ツ

4　関数　$y = -2x^3 + 3x^2 - 1$ は，$x =$［テ］で極大値［ト］，$x =$［ナ］で極小値［ニヌ］をとる。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ Note }

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第16講　関数の最大・最小，方程式への応用，不定積分

§1　関数の最大・最小

要点整理 と 公式

要点1　関数の最大値・最小値

関数 $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ の区間 $-4 \leqq x \leqq 2$ における最大値，最小値を求める。

$f'(x) =$

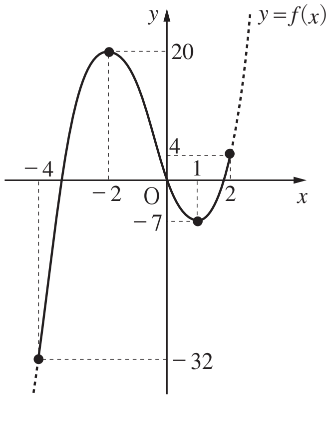
$f'(x) = 0$ となるのは $x = -2,\ 1$ のとき

区間 $-4 \leqq x \leqq 2$ における $f(x)$ の増減表は以下。

x	-4	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-32	↗	20	↘	-7	↗	4
			極大		極小		

よって，区間 $-4 \leqq x \leqq 2$ における $y = f(x)$ のグラフは

右図実線部分。



したがって，

$x =$ 　　で最大値

$x =$ 　　で最小値

をとる。

関数 $f(x)$ において，極大値と最大値はともに 20 で一致しているが，極小値と最小値は一致しない。

一般に，区間 $a \leqq x \leqq b$ で定義された関数の最大値，最小値は，区間の端における関数の値と極値の値を比較して求める必要がある。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ メモ }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1

次の関数の最大値，最小値を求めよ。

(1)　$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1 \quad \left(\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 5\right)$

(2)　$y = -2x^3 - 6x^2 + 4 \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$

Point Pickup

関数の最大値・最小値

関数 $y = f(x)$ の最大値，最小値を求める手順は以下。

①　導関数 $f'(x)$　を求める。

②　$f'(x) = 0$　となるような実数 x を求める。この x が極値をとる x の値の候補。

③　②で求めた x の値の前後における $f'(x)$ の符号を調べ，与えられた区間における増減表をかく。

④　③の増減表を元に，グラフをかく。

⑤　④のグラフから最大，最小となる点をみつけ，その値を求める。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

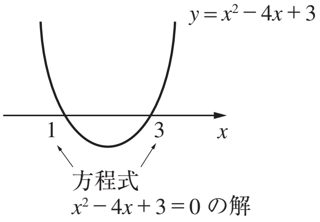
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§2 方程式への応用

要点整理 と 公式

要点2 3次方程式の実数解の個数

方程式 $f(x)=0$ の実数解は，関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸との共有点の x 座標である。例えば，2 次方程式 $x^2-4x+3=0$ の実数解は，2 次関数 $y=x^2-4x+3$ のグラフと x 軸との共有点の x 座標で，$x=1$，3 である。



方程式 $f(x)=0$ の実数解の「個数」は，関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸との共有点の「個数」であり，その個数は $y=f(x)$ のグラフをかくことで求めることができる。

(ex) 3 次方程式 $x^3-3x-1=0$ の異なる実数解の個数を求める。

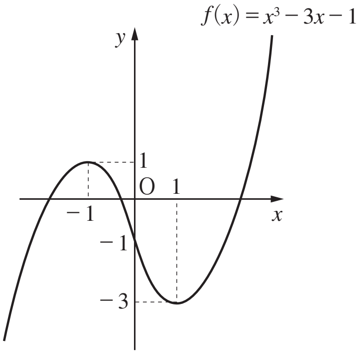
$f(x)=x^3-3x-1$ とおく。

$f'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$ となるのは $x=-1$，1 のとき。

よって，$f(x)$ の増減表は以下。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	1	↘	-3	↗



したがって，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになり，

グラフと x 軸の共有点の個数は　　個である。

ゆえに，方程式　$x^3-3x-1=0$ の異なる実数解の個数は　　個である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ メモ }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2

次の 3 次方程式の異なる実数解の個数を求めよ。

(1)　$x^3 - 12x + 12 = 0$

(2)　$x^3 + 3x^2 - 4 = 0$

(3)　$x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = 0$

Point Pickup

3次方程式 $f(x) = 0$ の実数解の個数

3 次方程式 $f(x) = 0$　の異なる実数解の個数

$\Longleftrightarrow$　関数 $y = f(x)$　のグラフと x 軸の共有点の個数。

関数のグラフをかいて求めることができる。

※ 3 次方程式 $f(x) = 0$ の実数解は，$f(x)$ を因数分解し，方程式を解くことで求めることができる。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§3 ▸ 不定積分

要点整理 と 公式

要点❸ 不定積分

関数 $f(x)$ に対して，微分すると $f(x)$ になる関数を，$f(x)$ の「　　　　　　」（または「原始関数」）という。

(ex)　$(x^3)'=$　　　，　　　　$(x^3+1)'=$　　　，　　　$(x^3-2)'=$　　　より

x^3，x^3+1，x^3-2 は，いずれも　　　の不定積分である。

$f(x)$ の不定積分は無数にあり，その違いは「定数部分」だけである。

例えば，$3x^2$ の不定積分は x^3+C（C は定数）と表すことができる。

$F(x)$ を $f(x)$ の不定積分の1つとすると，任意の不定積分は

$F(x)+C$　　（C は定数）

とまとめて表すことができ，これを記号　$f(x)$　　（インテグラル・エフエックス・ディーエックス）で表す。

■ 不定積分

$F'(x)=f(x)$　のとき

$\int f(x)dx = F(x)+C$　　（C は定数）

関数 $f(x)$ の不定積分を求めることを，$f(x)$ を「　　　　」するといい，上記の定数 C を「 積分定数 」という。

以降は特に断りのない限り，C は積分定数を表すとする。

微分：x^3+C → $3x^2$

積分：$3x^2$ → x^3+C

$(x^3+C)'=3x^2$　　　…　x^3+C を微分すると　$3x^2$　となる。

⇕　　　　　　　　　　　⇕

$\int 3x^2dx = x^3+C$　　…　$3x^2$ を（x について）積分すると　x^3+C　となる。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ メモ }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3

x^2 を微分すると，$(x^2)' = 2x$　である。この式の両辺を 2 で割ることにより，

$\left(\frac{1}{2}x^2\right)' = x$　であることがわかる。したがって，

$$\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C \qquad (C\text{ は定数})$$

と表すことができる。

同様に，x^3，x をそれぞれ微分することにより，次の不定積分を求めよ。

(1)　$\int x^2 dx$　　　　(2)　$\int 1\,dx$

Point Pickup

不定積分

$F'(x) = f(x)$ のとき　　$\int f(x)dx = F(x) + C$　　(C は定数)

微分すると $f(x)$ になる関数の 1 つを $F(x)$ とすると，その定数違いの関数である

$F(x) + C$　はすべて微分すると　$f(x)$　となる。これらをまとめて $\int f(x)dx$　と表す。

x^n の不定積分

$n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots$ のとき

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \qquad (C\text{ は定数})$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§4 ▶ 不定積分の計算

要点整理 と 公式

要点 4 不定積分の性質と計算

一般に，不定積分の性質について次のことがいえる。

■ 不定積分の性質

k を定数とするとき

1. $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$
2. $\int \{f(x) + g(x)\}\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$
3. $\int \{f(x) - g(x)\}\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$

また，$\int 1\,dx$は $\int dx$と書くことができる。

(ex)　$\int(5x^2 - 4x + 3)\,dx = \int 5x^2dx - \int 4xdx + \int 3dx$

$= 5\int x^2dx - 4\int xdx + 3\int dx$

$= 5\cdot \qquad -4\cdot \qquad +3\cdot \qquad + \qquad \cdots$(※)

$= \dfrac{5}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + C$

(※)のように，積分定数 C は 1 つにまとめて書く。

また，x 以外の文字の関数についても，その不定積分を考えることができる。

例えば，$\int tdt = \qquad + C$　である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ メモ }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

4

次の不定積分を求めよ。

(1)　$\int (3x^2 - 4x + 5)\,dx$　　(2)　$\int (4t^2 - 1)\,dt$

Point Pickup

不定積分の計算

$$\int \{f(x) + g(x)\}\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int \{f(x) - g(x)\}\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$$

を利用し，項ごとに積分する。その際，

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$$

を利用して，定数を前に出した上で，

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$$

を用いて積分するとよい。積分定数は，項ごとではなくまとめて 1 つの C とする。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第16講　確認テスト

1　関数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5\ (-2 \leqq x \leqq 3)$ は，$x =$ [ア]，[イ]（[ア] < [イ]）で最大値 [ウ]，$x =$ [エオ] で最小値 [カキク] をとる。

2　次の方程式の異なる実数解の個数を求めよ。

(1)　$x^3 - 6x^2 + 9x - 3 = 0$　　[ケ] 個

(2)　$x^3 + 3x^2 - 9x + 5 = 0$　　[コ] 個

3　$\int 1dx = x + C$，$\int x\,dx = \frac{1}{[サ]}x^{[シ]} + C$，$\int x^2\,dx = \frac{1}{[ス]}x^{[セ]} + C$（$C$ は定数）である。

4　$\int (2x^2 - 3x + 1)\,dx = \frac{[ソ]}{[タ]}x^3 - \frac{3}{[チ]}x^{[ツ]} + x + C$（$C$ は定数）である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ Note }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第17講　定積分と面積

§1 定積分

要点整理 と 公式

要点1 定積分

関数 $f(x)=3x^2$ の不定積分は $\int 3x^2dx=x^3+C$（Cは積分定数）と表される。これを$F(x)$とおくと，$F(x)=x^3+C$ となり，これは x の関数である。

ここで，$F(3)-F(1)$ を計算すると

$$F(3)-F(1)=(3^3+C)-(1^3+C)=26$$

となり，この値は，積分定数 C とは無関係に 1 つに定まる。

一般に，関数 $f(x)$ の不定積分の 1 つを $F(x)$とするとき，

$$F(b)-F(a)$$

の値を，$f(x)$ の a から b までの「 定積分 」といい，記号「 $\int f(x)\,dx$」で表す。

a をこの定積分の「 下端（かたん）」，b を「 上端（じょうたん）」という。

また，$F(b)-F(a)$ を記号「　　　　　　」で表す。

■ **定積分**

$F'(x)=f(x)$ のとき

$$\int_a^b f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a)$$

(ex)　$\int_1^2 x^2dx=$

定積分の値は，積分定数 C の値に無関係であることより，不定積分の定数項を「 0 」とするとよい。

また，定積分 $\int_a^b f(x)dx$ を求めることを，$f(x)$を「a から b まで積分」するという。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

｛メモ｝

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1

次の定積分を求めよ。

(1) $\int_{1}^{3}(2x+3)\,dx$　　(2) $\int_{-2}^{1}(3x^2-18x-21)\,dx$

Point Pickup

定積分

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_{a}^{b} = F(b) - F(a)$$

① 関数 $f(x)$ の不定積分 $F(x)$ のうち，定数項が 0 のものを求める。

② $F(b) - F(a)$ を計算する。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§2 定積分の性質

要点整理 と 公式

要点2 定積分の性質と計算

一般に，定積分の性質について次のことがいえる。

■ 定積分の性質 その1

k を定数とする

1．$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

2．$\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

3．$\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

これらの性質は，$f(x)$の不定積分の 1 つを $F(x)$とおくことで証明できる。

上記の性質を用いると，定積分の計算を「項ごと」に行うことができる。

(ex)
$$\int_2^4 (x^2-6x+8)dx = \int_2^4 x^2dx - 6\int_2^4 xdx + 8\int_2^4 dx$$
$$= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_2^4 - 6\left[\frac{1}{2}x^2\right]_2^4 + 8\left[x\right]_2^4$$
$$= \frac{1}{3}(4^3-2^3) - 3(4^2-2^2) + 8(4-2)$$
$$= \frac{56}{3} - 36 + 16 = -\frac{4}{3}$$

また，積分区間が同じ定積分を 1 つにまとめることができる。

(ex)
$$\int_1^2 (2x-5)dx + \int_1^2 (x+4)dx = \int_1^2 \{(2x-5)+(x+4)\}dx$$
$$= \int_1^2 (3x-1)dx$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

要点3 定積分の上端と下端に関する性質

一般に，定積分の上端と下端に関する性質について，次のことがいえる。

■ 定積分の性質 その2

4．$\int_a^a f(x)dx = 0$

5．$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

6．$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

これらの性質を用いると，積分区間の上端と下端の入れ換えや，積分区間の連結ができる。

(ex)　$\int_2^2 (3x^2 + x - 2)dx =$

$\int_1^{-3} (5x^2 - 4x)dx = \int \quad (5x^2 - 4x)dx$

$\int_{-1}^1 (2x^2 + 5)dx + \int_1^2 (2x^2 + 5)dx = \int \quad (2x^2 + 5)dx$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2

次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{1}^{1}(3x^2-5x)\,dx$

(2) $\displaystyle\int_{-2}^{1}(3x^2-x+2)\,dx-\int_{2}^{1}(3x^2-x+2)\,dx$

Point Pickup

積分区間に関する定積分の性質

$\displaystyle\int_{a}^{a}f(x)\,dx=0$

$\displaystyle\int_{a}^{b}f(x)\,dx=-\int_{b}^{a}f(x)\,dx$

$\displaystyle\int_{a}^{b}f(x)\,dx=\int_{a}^{c}f(x)\,dx+\int_{c}^{b}f(x)\,dx$

これらを用いて，積分区間の上端と下端の交換や，積分区間を連結させることができる。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

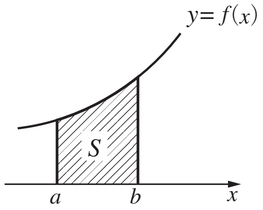
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§3 ▶ 定積分と面積

要点整理 と 公式

要点 4 定積分と面積

定積分を用いて，図形の面積を求めることを考える。



右図のように，区間 $a \leqq x \leqq b$ で $f(x) \geqq 0$ のとき，

曲線 $y = f(x)$ と x 軸，および 2 直線 $x = a$，$x = b$ で

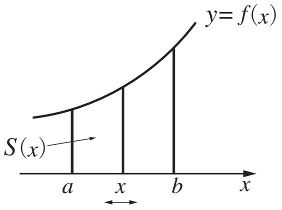
囲まれた部分の面積を S とする。

また区間内の x に対し，x 座標が a から x までの部分の

面積を $S(x)$ とおくと，$S(x)$ は x の関数であり，

$S(a) = 0,\qquad S(b) = S,\qquad S = S(b) - S(a)$

である。

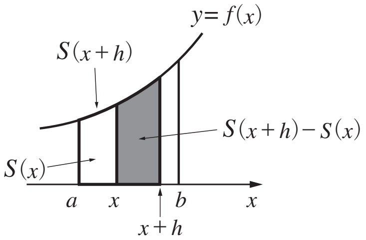


この面積 $S(x)$ が，$f(x)$ の不定積分の 1 つであることを示す。

$h > 0$ として，x を h だけ増加させると，面積は

$S(x+h) - S(x)$

だけ増加する。

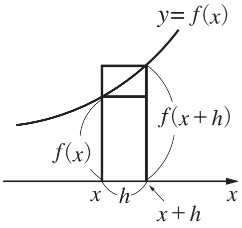


この増加した部分の面積と，横の長さが h，

縦の長さが $f(x)$，$f(x+h)$ の 2 つの長方形の

面積の大小関係から

$$h \cdot f(x) \leqq S(x+h) - S(x) \leqq h \cdot f(x+h)$$



が成り立つ。辺々を h で割ると

$$f(x) \leqq \frac{S(x+h) - S(x)}{h} \leqq f(x+h)$$

である。ここで，$h \to 0$ のとき，

$$f(x+h) \to f(x)$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} = S'(x)$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

であるから,

$f(x) \leqq S'(x) \leqq f(x)$　　つまり　　$S'(x) = f(x)$ である。

これは，$h < 0$ においても同様である。

よって，面積 $S(x)$ は $f(x)$ の不定積分の 1 つである。

したがって，$S = S(b) - S(a) = \Big[S(x) \Big]_a^b = \int_a^b f(x)\,dx$　である。

一般に，次のことが成り立つ。

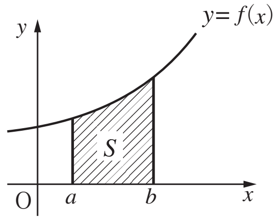
■ **定積分と面積①**

区間 $a \leqq x \leqq b$ で常に $f(x) \geqq 0$ のとき

曲線 $y = f(x)$ と x 軸，および 2 直線

$x = a$，$x = b$ で囲まれる部分の面積 S は

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$



次に，区間 $a \leqq x \leqq b$ で常に $f(x) \leqq 0$ のとき，

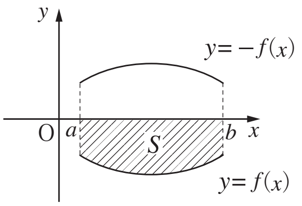
曲線 $y = f(x)$ と x 軸，および 2 直線 $x = a$，$x = b$ で

囲まれる部分の面積 S は，右図のように

曲線 $y = f(x)$ を x 軸に関して対称に移動した曲線

$y = -f(x)$ と x 軸，および 2 直線 $x = a$，$x = b$ で

囲まれる部分の面積に等しい。



したがって，次のことが成り立つ。

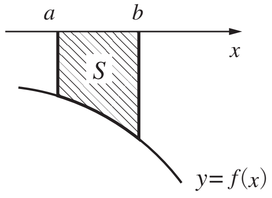
■ **定積分と面積②**

区間 $a \leqq x \leqq b$ で常に $f(x) \leqq 0$ のとき

曲線 $y = f(x)$ と x 軸，および 2 直線

$x = a$，$x = b$ で囲まれる部分の面積 S は

$$S = \int_a^b \{-f(x)\}\,dx$$



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3

次の曲線と 2 直線，および x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

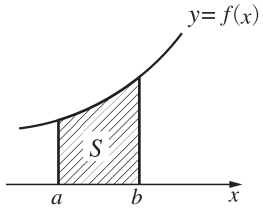
(1)　$y = x^2 + 1$，$x = -1$，$x = 2$

(2)　$y = -x^2 + 2x - 3$，$x = 0$，$x = 3$

Point Pickup

曲線と x 軸の間の面積

曲線 $y = f(x)$ と x 軸，および 2 直線 $x = a$，$x = b$ で囲まれる部分の面積 S の求め方は以下。



①　$y = f(x)$ のグラフをかく。

②　区間 $a \leqq x \leqq b$ において，$f(x)$ のグラフと x 軸の上下関係を調べる。

③　②において

常に $f(x) \geqq 0$ のとき　$S = \int_a^b f(x)\,dx$

常に $f(x) \leqq 0$ のとき　$S = \int_a^b \{-f(x)\}\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

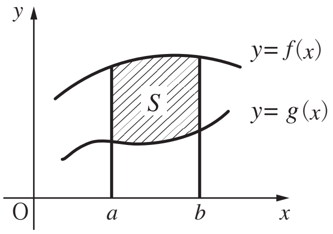
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§4 ▸ 2つのグラフの間の面積

要点整理 と 公式

要点5 2つの曲線の間の部分の面積

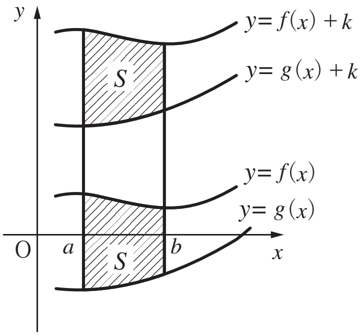
2つの曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$，および2直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分の面積 S を定積分で表す。



まず区間 $a \leqq x \leqq b$ で常に $f(x) \geqq g(x) \geqq 0$ のときは，求める面積 S は，$a \leqq x \leqq b$ における $y=f(x)$ と x 軸の間の面積から，$y=g(x)$ と x 軸の間の面積を引いたものとして求められるから，

$$S=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$$

と表される。



また，区間 $a \leqq x \leqq b$ で常に $f(x) \geqq g(x)$ であるが，$f(x)$ や $g(x)$ が負の値をとることがあるときは，$f(x)$，$g(x)$ を y 軸方向に k だけ平行移動し，2つのグラフがこの区間で常に x 軸より上側にあるようにする。このとき，

$$S=\int_a^b \{(f(x)+k)-(g(x)+k)\}dx=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$$

と表される。

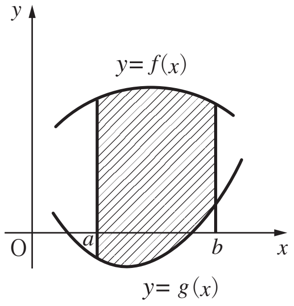
よって，次のことが成り立つ。

■ **2つの曲線の間の面積**

区間 $a \leqq x \leqq b$ で常に $f(x) \geqq g(x)$ のとき，

2つの曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$，および2直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分の面積 S は

$$S=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$$



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ メモ }

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

4

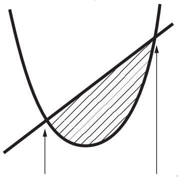
［1］　放物線　$y = x^2 - x$ と x 軸によって囲まれた部分の面積を求めよ。

［2］　放物線　$y = -x^2 + 4x + 2$ と $y = 2x - 1$ で囲まれる部分の面積を求めよ。

Point Pickup

曲線と直線の間の面積

曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = g(x)$ で囲まれる部分の面積 S の求め方は以下。



①　$y = f(x)$，$y = g(x)$ のグラフをかく。

②　方程式 $f(x) = g(x)$ を解き，曲線と直線の交点の x 座標 $x = a$，b を求める。

③　②の交点を元に，積分範囲を定める。

④　③の範囲において

常に $f(x) \geqq g(x)$ のとき　$S = \int_a^b \{f(x) - g(x)\}\,dx$

常に $g(x) \geqq f(x)$ のとき　$S = \int_a^b \{g(x) - f(x)\}\,dx$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

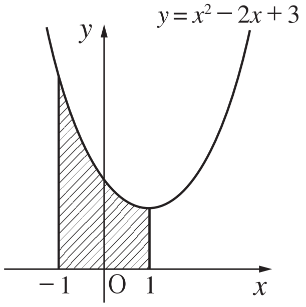
第17講　確認テスト

1 $\int_{-1}^{3}(3x^2-4x-5)\,dx=$ [アイ] である。

2 $\int_{1}^{1}x^2\,dx=$ [ウ] である。

また，$\int_{1}^{2}(3x-1)\,dx+\int_{2}^{3}(3x-1)\,dx=\int_{1}^{[エ]}(3x-1)\,dx=$ [オカ] である。

3 放物線 $y=x^2-2x+3$ と x 軸，および 2 直線 $x=-1,\ 1$ で囲まれた部分の面積は $\dfrac{[キク]}{[ケ]}$ である。



4 (1) $y=x^2-3x$ と x 軸によって囲まれた部分の面積は $\dfrac{[コ]}{[サ]}$ である。

(2) 放物線 $y=-x^2+4x-5$ と直線 $y=-2x$ の交点の x 座標は $x=$ [シ]，[ス] である。

ただし，[シ] $<$ [ス] とする。

よって，この放物線と直線で囲まれる部分の面積は $\dfrac{[セソ]}{[タ]}$ である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ Note }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第18講　数列，等差数列

§1　数列

要点整理 と 公式

要点 1　数列

数を一列に並べたものを「　　　　」という。例えば，

正の偶数を小さい順に並べた　　2，4，6，8，　，……　　……①

自然数の2乗を小さい順に並べた　　1，4，9，16，　，……　　……②

は，数列である。

数列における各数を，その数列の「　　」といい，最初の項から順に「第1項」「第2項」「第3項」…，という。よって，n 番目の項は「　　　　」という。また，第1項を「　　　　」という。①の初項は　，②の第3項は　である。

数列は一般的に

a_1，a_2，a_3，……，a_n，……

と添字をつけて表す。この添字は，その数列が第何項であるかを表す。例えば a_5 は第5項を表す。また，この数列をまとめて $\{a_n\}$ のように表すことがある。

①の数列の第 n 項は，

$$a_n = 2n$$

のように n の式で表すことができる。この式を用いると

$a_1 = 2 \cdot 1 = 2$，$a_2 = 2 \cdot \quad = \quad$，$a_{10} = 2 \cdot \quad =$

のように，数列の各項を求めることができる。

$a_n = 2n$ のように，数列 $\{a_n\}$ の第 n 項 a_n が n の式で表されるとき，a_n を数列 $\{a_n\}$ の「　　　　」という。

(ex) 一般項 a_n が $a_n = 2^n$ で表される数列について，

第3項は　　　　，第7項は　　　　である。

項の個数が無限である数列を「無限数列」という。例えば，①や②は無限数列である。

一方，項の個数が有限である数列を「有限数列」という。例えば，12の正の約数を小さい

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

順に並べた数列

1, 2, 3, 4, 6, 12　　　　……③

は有限数列である。有限数列において，その数列の項の個数を「　　　」，最後の項を「　　　」という。③の数列の項数は「　」，末項は「　　」である。

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1

［1］　一般項が次の式で表される数列 $\{a_n\}$ について，初項から第5項までを求めよ。

（1）　$a_n = 2n - 3$　　　　（2）　$a_n = 2^{n-1}$

［2］　数列 1，−2，4，−8，16 の初項，末項，項数をいえ。

Point Pickup

数列 $\{a_n\}$ の一般項から各項を求める。

→　第●項は，一般項を表す式の n に $n =$ ● を代入して求める。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§2 ▶ 等差数列

要点整理 と 公式

要点2 等差数列

正の奇数を小さい順に並べた数列 1，3，5，7，9，…… は，初項 　　 に次々に 　　 を加えて得られる。

また，10 に次々に -3 を加えると，次の数列が得られる。

10，　，　，　，　，……

このように，初項 a に一定の数 d を次々に加えて得られる数列を「　　　　」といい，一定の数 d をその等差数列の「　　　」という。

（ex）初項 2，公差 3 の等差数列は

である。

要点3 等差数列の一般項

初項 a，公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ について

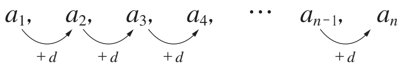
$a_1 = a$

$a_2 = a_1 + d = a + d$

$a_3 = a_2 + d = (a + d) + d = a + 2d$

$a_4 = a_3 + d = (a + 2d) + d = a + 3d$

………



と表されるから，第 n 項は

$$a_n = a + (n - 1)d$$

である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

一般に，次のことが成り立つ。

■ **等差数列の一般項**

初項 a，公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = a + (n - 1)d$$

（ex）初項 2，公差 3 の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$a_n = \quad + (n - 1) \cdot \quad = 3n - 1$　　つまり　$a_n = 3n - 1$　である。

第 10 項は $a_{10} =$ 　　　　　　　である。

※等差数列 $\{a_n\}$ において，次の関係が成り立つ。

$a_{n+1} = a_n + d$　　つまり　$a_{n+1} - a_n = d$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2

［1］　初項 -2，公差 3 の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項と第 20 項を求めよ。

［2］　次の等差数列 $\{a_n\}$ の初項 a と公差 d を求め，一般項を求めよ。

(1)　3，8，13，18，……　　　(2)　19，12，5，-2，……

Point Pickup

等差数列の一般項

初項 a，公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = a + (n-1)d$$

等差数列の公差 d は，隣り合う 2 項の「差」である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

｛解答｝

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§3 ▶ 等差数列の一般項

要点整理 と 公式

要点4 与えられた 2 項から等差数列の一般項を求める

第 3 項が 7，第 10 項が 28 である等差数列 $\{a_n\}$ の一般項を求める。

初項を　　，公差を　　とすると，等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$a_n =$　　$+ (n-1)$

と表される。

$a_3 = 7$　より　$a + 2d = 7$　……①

$a_{10} = 28$ より　　　　　　　……②

②－①より　$7d = 21$　　よって　$d = 3$

このとき①より　$a + 6 = 7$　　よって　$a = 1$

したがって一般項は　$a_n =$　　$+ (n-1)\cdot$　　$= 3n - 2$　である。

要点5 ある数が第何項かを求める

等差数列 $\{a_n\}$ の一般項が　$a_n = 3n - 2$ で与えられたとき，52 はこの等差数列の第何項かを求める。

a　$= 52$　より　　　　$= 52$

これを解くと，$n = 18$

よって，52 は第 18 項である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

｛メモ｝

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3

第2項が9，第6項が -7 である等差数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ。

(1)　この等差数列の一般項を求めよ。

(2)　第20項を求めよ。

(3)　-23 は第何項か。

Point Pickup

等差数列の一般項

等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は，初項を a，公差を d とおくと

$$a_n = a + (n-1)d$$

と表される。

a，d を求めるためには

与えられた項の条件から，a，d についての連立方程式を立てて解く。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§4 ▶ 等差数列の和

要点整理 と 公式

要点 6 等差数列の和

初項 1，公差 3 の等差数列の初項から第 8 項までの和を求める。

求める和を S とすると

$$S = 1 + 4 + 7 + 10 + 13 + 16 + 19 + 22 \quad \cdots\cdots ①$$

である。

この和 S は，項を加える順番を逆にしても同じである。つまり，

$$S = 22 + 19 + 16 + 13 + 10 + 7 + 4 + 1 \quad \cdots\cdots ②$$

である。①と②を辺々加えると

$$\begin{array}{rrcl} & S &=& 1 + 4 + 7 + 10 + 13 + 16 + 19 + 22 \\ +) & S &=& 22 + 19 + 16 + 13 + 10 + 7 + 4 + 1 \\ \hline & 2S &=& 23 + 23 + 23 + 23 + 23 + 23 + 23 + 23 \end{array}$$

よって　$S = \dfrac{8 \times 23}{2}$　……③

$= 92$

③における「8」は「項数」であり，「23」は初項 1 と末項 22 の和である。

よって③の式から，等差数列の和 S は次のように表される。

$$S = \frac{項数(初項 + 末項)}{2}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

一般に，次のことが成り立つ。

■ **等差数列の和 その①**

初項 a，末項 l，項数 n の等差数列の和 S_n は

$$S_n = \frac{n(a+l)}{2} \quad \cdots\cdots ④$$

また，初項 a，公差 d，項数 n の等差数列の末項は，第 n 項と等しい。つまり

$$l = a + (n-1)d$$

である。これを④に代入すると，次のことが成り立つ。

■ **等差数列の和 その②**

初項 a，公差 d，項数 n の等差数列の和 S_n は

$$S_n = \frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

4

［1］　初項 29，末項 1，項数 8 の等差数列の和 S を求めよ。

［2］　(1)　初項 1，公差 2，項数 20 の等差数列の和 S を求めよ。

(2)　初項 2，公差 5，末項 72 の等差数列の和 S を求めよ。

Point Pickup

等差数列の和

初項 a，末項 l，項数 n の等差数列の和 S_n は　$S_n = \dfrac{n(a+l)}{2}$

初項 a，公差 d，項数 n の等差数列の和 S_n は　$S_n = \dfrac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第18講　確認テスト

1　数列 $\{a_n\}$ の一般項が $a_n = \dfrac{1}{n+1}$ で表される数列の初項は $\dfrac{1}{\boxed{\text{ア}}}$，第 3 項は $\dfrac{1}{\boxed{\text{イ}}}$ である。

また，数列 2，4，6，8，10，12，14 の初項は $\boxed{\text{ウ}}$，末項は $\boxed{\text{エオ}}$，項数は $\boxed{\text{カ}}$ である。

2　等差数列 $\{a_n\}$ が −2，4，10，16，…… で与えられるとき，その初項は $a = \boxed{\text{キク}}$，公差は $d = \boxed{\text{ケ}}$ である。また，一般項は $a_n = \boxed{\text{コ}}\,n - \boxed{\text{サ}}$ である。

3　第 5 項が 15，第 12 項が 29 である等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n = \boxed{\text{シ}}\,n + \boxed{\text{ス}}$ である。また，この数列の第 15 項は $\boxed{\text{セソ}}$，119 はこの数列の第 $\boxed{\text{タチ}}$ 項である。

4　初項 2，末項 27，項数 20 の等差数列の和は $\boxed{\text{ツテト}}$ である。

また，初項 3，公差 5，項数 15 の等差数列の和は $\boxed{\text{ナニヌ}}$ である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ Note }

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第19講　等比数列，等差中項と等比中項

§1　等比数列

要点整理 と 公式

要点 1　等比数列

1 に次々に 2 を掛けると，次の数列が得られる。

1，2，4，8，16，……

このように，初項 a に一定の数 r を次々に掛けて得られる数列を「　　　　　」といい，一定の数 r をその等比数列の「　　　」という。

（ex）初項 2，公比 3 の等比数列は

初項 3，公比 -2 の等比数列は

要点 2　等比数列の一般項

初項 a，公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ について

$a_1 = a$

$a_2 = a_1 \times r = ar$

$a_3 = a_2 \times r = ar \times r = ar^2$

$a_4 = a_3 \times r = ar^2 \times r = ar^3$

………

と表されるから，第 n 項は

$a_n = ar^{n-1}$

である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

一般に，次のことが成り立つ。

■ 等比数列の一般項

初項 a，公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = ar^{n-1}$$

(ex) 初項 3，公比 2 の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は　$a_n =$　・

初項 2，公比 -3 の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は　$a_n =$　・

※等比数列 $\{a_n\}$ において，次の関係が成り立つ。

$a_{n+1} = ra_n$　　とくに $\{a_n\}$ の各項が 0 にならないときは　$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = r$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1

［1］　初項 2，公比 2 の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項と第 6 項を求めよ。

［2］　次の等比数列 $\{a_n\}$ の初項 a と公比 r を求め，一般項を求めよ。

(1)　48，12，3，$\dfrac{3}{4}$，……　　(2)　2，-10，50，-250……

Point Pickup

等比数列の一般項

初項 a，公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = ar^{n-1}$$

等比数列の公比 r は，隣り合う 2 項の「比」である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§2 等比数列の一般項

要点整理 と 公式

要点3 与えられた 2 項から等比数列の一般項を求める

第 3 項が -12，第 5 項が -48 である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求める。

初項を　，公比を　とすると，等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$a_n =$

と表される。

$a_3 = -12$ より　　　　　　…… ①

$a_5 = -48$ より　　　　　　…… ②

② 　①より　　　　　　$r^2 = 4$　　よって　$r =$

$r = 2$ のとき，①より　$4a = -12$　　$a = -3$

よって　$a_n = -3 \cdot 2^{n-1}$

$r = -2$ のとき，①より　$4a = -12$　　$a = -3$

よって　$a_n = -3 \cdot (-2)^{n-1}$

したがって，求める一般項は　$a_n = -3 \cdot 2^{n-1}$　または $a_n = -3 \cdot (-2)^{n-1}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ メモ }

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2

(1)　第 4 項が 81，第 6 項が 729 である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(2)　第 2 項が 48，第 5 項が -6 である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

ただし，公比は実数とする。

Point Pickup

等比数列の一般項

等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は，初項を a，公比を r とおくと

$$a_n = ar^{n-1}$$

と表される。

a，r を求めるためには，与えられた項の条件から，a，r についての連立方程式を立てて解く。

この連立方程式は，2 式を辺々割る（または一方の式をもう一方の式に代入する）ことで解くことができる。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§3 等比数列の和

要点整理 と 公式

要点4 等比数列の和

初項 2，公比 3 の等比数列の初項から第 5 項までの和を求める。

求める和を S とすると

$$S = 2 + 2\cdot 3 + 2\cdot 3^2 + 2\cdot 3^3 + 2\cdot 3^4 \qquad \cdots\cdots ①$$

である。

この両辺に公比 3 を掛けると

$$3S = 2\cdot 3 + 2\cdot 3^2 + 2\cdot 3^3 + 2\cdot 3^4 + 2\cdot 3^5 \qquad \cdots\cdots ②$$

となる。①－②より

$$\begin{array}{rrl} & S = & 2 + 2\cdot 3 + 2\cdot 3^2 + 2\cdot 3^3 + 2\cdot 3^4 \\ -) & 3S = & \phantom{2 +{}} 2\cdot 3 + 2\cdot 3^2 + 2\cdot 3^3 + 2\cdot 3^4 + 2\cdot 3^5 \\ \hline & S - 3S = & 2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - 2\cdot 3^5 \end{array}$$

$$(1 - 3)S = 2(1 - 3^5)$$

よって　$S = \dfrac{2(1 - 3^5)}{1 - 3}$　……③

$$= 242$$

③の式から，等比数列の和 S は次のように表される。

$$S = \frac{初項\times\{1 - (公比)^n\}}{1 - 公比}$$

また，②－①より　$(3 - 1)S = 2(3^5 - 1)$　　よって　$S = \dfrac{2(3^5 - 1)}{3 - 1}$　……④

④の式から，等比数列の和 S は次のように表される。

$$S = \frac{初項\times\{(公比)^n - 1\}}{公比 - 1}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

一般に，次のことが成り立つ。

■ 等比数列の和 その①

初項 a，公比 r，項数 n の等比数列の和 S_n は

$r \neq 1$ のとき　$S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

初項 2，公比 1 の等比数列の初項から第 5 項までの和 S は

$$S = 2 + 2\cdot 1 + 2\cdot 1^2 + 2\cdot 1^3 + 2\cdot 1^4$$

$=$

$= 5 \times 2$ ……⑤

$= 10$

である。

⑤の式から，公比が 1 の等比数列の和 S は次のように表される。

$S =$ 項数 $\times$ 初項

よって，次のことが成り立つ。

■ 等比数列の和 その②

初項 a，公比 1，項数 n の等比数列の和 S_n は

$S_n = na$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3

(1)　初項 5，公比 2，項数 6 の等比数列の和 S を求めよ。

(2)　初項 8，公比 -3，項数 5 の等比数列の和 S を求めよ。

(3)　初項 1，公比 $\dfrac{1}{3}$ の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

Point Pickup

等比数列の和

初項 a，公比 r，項数 n の等比数列の和 S_n は

$r \neq 1$ のとき　　$S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

$r = 1$ のとき　　$S_n = na$

とくに，

$r > 1$ のとき（公比が 1 より大きいとき）は　　$S_n = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

$r < 1$ のとき（公比がマイナス，または 0 から 1 の間のとき）は

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

を使うと，分母がプラスとなり計算が楽になる。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§4 ▶ 等差中項と等比中項

要点整理 と 公式

要点5 等差中項の性質

数列 a，b，c が等差数列のとき，隣り合う 2 項の「　　　」が等しいので，

$$b-a=c-b$$

よって　$2b=a+c$　が成り立つ。

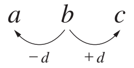
また，逆に $2b=a+c$ ならば，$b-a=c-b$　より，数列 a，b，c は等差数列である。

よって，以下のことがいえる。

■ **等差中項の性質**

数列 a，b，c が等差数列　$\iff$　$2b=a+c$

また，数列 a，b，c が公差 d の等差数列であるとき，



$a=b-d$　かつ　$c=b+d$

この 2 式を辺々足すと　$a+c=2b$　となり，上記の性質が確認できる。

数列 a，b，c が等差数列のとき，b を「等差中項」という。

要点6 等比中項の性質

数列 a，b，c が等比数列のとき，隣り合う 2 項の「　　　」が等しいので，

$$\frac{b}{a}=\frac{c}{b}$$

よって $b^2=ac$　が成り立つ。

また，逆に $b^2=ac$ ならば，$\dfrac{b}{a}=\dfrac{c}{b}$　より，数列 a，b，c は等比数列である。

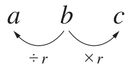
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

よって，以下のことがいえる。

■ 等比中項の性質

数列 a，b，c が等比数列 $\iff$ $b^2 = ac$

また，数列 a，b，c が公比 r の等比数列であるとき，



$a = \dfrac{b}{r}$　かつ　$c = br$

この 2 式を辺々掛けると　$ac = b^2$　となり，上記の性質が確認できる。

数列 a，b，c が等比数列のとき，b を「等比中項」という。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

4

(1)　3,　x,　15,　……　が等差数列であるとき，x の値を求めよ。

(2)　3,　x,　48,　……　が等比数列であるとき，x の値を求めよ。

Point Pickup

等差中項・等比中項の性質

数列 a，b，c が等差数列　$\Longleftrightarrow$　$2b = a + c$

数列 a，b，c が等比数列　$\Longleftrightarrow$　$b^2 = ac$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第19講　確認テスト

1 等比数列 $\{a_n\}$ が2, 6, 18, 54, …… で与えられるとき，その初項は $a =$ [ア]，公比は $r =$ [イ] である。また，一般項は $a_n =$ [ウ]・[エ]$^{n-1}$ である。

2 第2項が6，第4項が54である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n =$ [オ]・[カ]$^{n-1}$

または $a_n =$ [キク]・([ケコ])$^{n-1}$ である。

3 初項4，公比2，項数7の等比数列の和は [サシス] である。

また，初項6，公比 -2，項数4の等比数列の和は [セソタ] である。

4 数列3，x，17が等差数列のとき，$x =$ [チツ] である。

また，数列2，x，18が等比数列のとき，$x =$ [テト]，[ナ] である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ Note }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第20講　和の記号Σ，階差数列

§1 ▶ 和の記号Σ

要点整理 と 公式

要点 1 和の記号Σ（シグマ）

数列 $\{a_n\}$ の「初項」から「第 n 項」までの和 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_n$ を簡単に表すために，記号Σ（シグマ）を用いて「$\sum_{k=1}^{n} a_k$」と書くことができる。

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_n$$

$\sum_{k=1}^{n} a_k$ において，k は 1 から n までの整数をとる変数である。この「1」や「n」を変化させることにより，数列 $\{a_n\}$ のある部分の和を表すことができる。

(ex) $\sum_{k=2}^{5} a_k =$

$\sum_{k=1}^{n} a_k$ の a_k は，$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$ のように k の式で表すことができる。この k の式に 1 を入れたものが数列 $\{a_n\}$ の初項，n を入れたものが第 n 項（一般項）であり，1 から n まで代入すると，各項を列挙した和の形で表すことができる。

(ex) $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = (2\cdot\quad -1) + (2\cdot\quad -1) + (2\cdot\quad -1) + \cdots\cdots + (2\cdot\quad -1)$

$=$

また，各項を列挙した和の形で表された式を，Σを用いて表すことができる。

(ex) $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$

※Σを使った表し方は一つではない。

例えば　$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \sum_{k=1}^{5} k = \sum_{k=2}^{6}(k-1)$　と表すことができる。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ メモ }

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1

[1]　次の式を，数列の各項を列挙した和の形で表せ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} a_k$　　(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} (3k+1)$　　(3) $\displaystyle\sum_{m=1}^{n} 2\cdot 3^{m-1}$

[2]　次の式を，Σを用いて表せ。

(1) $2+4+6+8+10$　　(2) $3^2+4^2+5^2+\cdots\cdots+n^2$

Point Pickup

和の記号Σ（シグマ）

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_n$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§2 ▶ 和の公式とΣの性質

要点整理 と 公式

要点2 自然数の和の公式

1 から n までの自然数の和 $1+2+3+\cdots\cdots+n$ は，等差数列 $a_n=n$ の初項から第 n 項までの和である。よって，

$1+2+3+\cdots\cdots+n=$

と表される。

また，$1+2+3+\cdots\cdots+n$ は，和の記号 Σ を用いて $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}$ と表される。

以上より，次の等式が得られる。

$$\sum_{k=1}^{n} k=\frac{1}{2}n(n+1)$$

この等式において，左辺の n を書き換えると，右辺の n も書き換わる。

(ex) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} k=\frac{1}{2}\cdot\quad\cdot$

各項がすべて 2 である数列の初項から第 n 項までの和 $2+2+2+\cdots\cdots+2$ は

$2+2+2+\cdots\cdots+2=$

と表される。また $2+2+2+\cdots\cdots+2$ は，和の記号Σ を用いて $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}$ と表される。

よって，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2=2n$ である。

項がすべて c である数列に関して，次の等式が成り立つ。

$$\sum_{k=1}^{n} c=cn$$

要点3 自然数の 2 乗の和の公式

1 から n までの自然数の 2 乗の和 $S=1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2$ を求める。

等式 $(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$ において

$k=1$ のとき　$2^3-1^3=3\cdot1^2+3\cdot1+1$

$k=2$ のとき　$3^3-2^3=3\cdot2^2+3\cdot2+1$

$k=3$ のとき　$4^3-3^3=3\cdot3^2+3\cdot3+1$

⋮

$k=n$ のとき $(n+1)^3-n^3=3\cdot n^2+3\cdot n+1$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

これらの式を辺々加えると

$$(n+1)^3-1=3(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)+3(1+2+3+\cdots+n)+1\cdot n$$

$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=S,\quad 1+2+3+\cdots\cdots+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$　より

$$(n+1)^3-1=3S+3\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n$$

$$3S=(n+1)^3-(n+1)-\frac{3}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2(n+1)^3-\frac{1}{2}\cdot 2(n+1)-\frac{1}{2}\cdot 3n(n+1)$$

$$=\frac{1}{2}(n+1)\{2(n+1)^2-2-3n\}=\frac{1}{2}(n+1)(2n^2+n)=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)$$

よって $S=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

つまり　$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$である。

また，$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2$ は，和の記号Σ を用いて $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}$　　と表される。

以上より，次の等式が得られる。

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

この等式において，左辺の n を書き換えると，右辺の n も書き換わる。

(ex) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}k^2=\frac{1}{6}\cdot$　・　・

要点4 Σ の性質

$ca_1+ca_2+ca_3+\cdots\cdots+ca_n=c(a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n)$ である。

また，$(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+(a_3+b_3)+\cdots\cdots+(a_n+b_n)$

$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)+(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n)$ である。

これらの式をΣを用いて表すと，以下の性質が成り立つ。

■Σの性質

$$\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k \qquad \sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2

次の和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k+4)$　　(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^2-3k+2)$

Point Pickup

Σの公式と性質

$$\sum_{k=1}^{n}c=cn \qquad \sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1) \qquad \sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k \qquad \sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$$

一般的に，Σの計算によって求めた和は，「因数分解」した形で表す。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

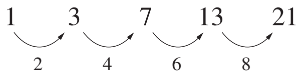
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§3 ▶ 階差数列

要点整理 と 公式

要点5 階差数列

数列 1, 3, 7, 13, 21, …… において，



隣り合う 2 項の差をとって並べると，

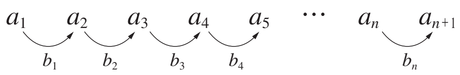
数列 2, 4, 6, 8, …… が得られる。

この数列は，初項　　，公差　　　の等差数列である。

数列 $\{a_n\}$ において，隣り合う 2 項の差を項とする数列 $\{b_n\}$ は，

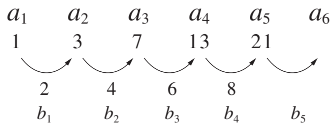
$$a_{n+1} - a_n = b_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

と表され，数列 $\{b_n\}$ を



もとの数列 $\{a_n\}$ の「　　　　　　　」という。

上の例において，数列 $\{b_n\}$ の一般項は



$b_n =$

である。したがって，

$b_5 =$　　　より，$a_6 = a_5 + b_5 = 21 + 10 = 31$

$b_6 =$　　　より，$a_7 = a_6 + b_6 = 31 + 12 = 43$

である。

このように，階差数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めることにより，

$$a_{n+1} = a_n + b_n$$

であることを用いて，もとの数列 $\{a_n\}$ の項を順に求めることができる。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ メモ }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とする。数列 $\{a_n\}$ が

$$1,\ 3,\ 7,\ 15,\ 31,\ \cdots\cdots$$

であるとき，$\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

また，a_6，a_7 をそれぞれ求めよ。

Point Pickup

階差数列

数列 $\{a_n\}$ において，隣り合う 2 項の差を項とする数列 $\{b_n\}$ は，

$$a_{n+1} - a_n = b_n\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

と表され，数列 $\{b_n\}$ をもとの数列 $\{a_n\}$ の「階差数列」という。

この階差数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めることにより，もとの数列 $\{a_n\}$ の項を順に求めることができる。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

｛解答｝

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§4 ▶ 階差数列と一般項

要点整理 と 公式

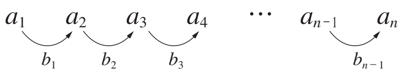
要点 6 階差数列からもとの数列の一般項を求める

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$a_{n+1} = a_n + b_n$ であることより

$a_2 = a_1 + b_1$

$a_3 = a_2 + b_2 = a_1 + b_1 + b_2$

$a_4 = a_3 + b_3 = a_1 + b_1 + b_2 + b_3$



である。よって，

$$a_n = a_{n-1} + b_{n-1} = a_1 + b_1 + b_2 + b_3 + \cdots\cdots + b_{n-1}$$

が成り立つ。ここで，$b_1 + b_2 + b_3 + \cdots\cdots + b_{n-1} =$ 　　　　　と表すことができる。

したがって，以下のことが成り立つ。

■ 階差数列と一般項

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

(ex) 数列 1，3，7，13，21，…… の一般項を求める。

この数列を $\{a_n\}$，階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$\{b_n\}$ は

であり，$b_n =$ 　　　　　　　　　　と表される。

よって，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}$$

$$= 1 + 2 \cdot \frac{1}{2}(n-1)\{(n-1)+1\}$$

$$= 1 + (n-1)n = n^2 - n + 1 \quad \cdots\cdots ①$$ である。

$a_1 = 1$ である。また，①において $n = 1$ のとき $1^2 - 1 + 1 = 1$ である。

よって，①は $n = 1$ のときも成り立つ。

したがって，求める一般項は　$a_n = n^2 - n + 1$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ メモ }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

4

次の数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　1, 2, 7, 16, 29, ……　　(2)　3, 4, 7, 16, 43, ……

Point Pickup

階差数列から一般項を求める

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \quad \cdots\cdots ①$$

よって，階差数列 $\{b_n\}$ の一般項を求め，その初項から第 $n-1$ 項までの和を求めることにより，もとの数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めることができる。

ただし，a_1 は階差数列から求めることはできない。

したがって，①の結果に $n=1$ を代入し，あらかじめ与えられた a_1 と一致するかの確認が必要となる。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第20講　確認テスト

1 $\sum_{k=1}^{3}(2k+1)=3+\boxed{ア}+7$　である。

また，$2^2+3^2+4^2+\cdots\cdots+10^2=\sum_{k=\boxed{イ}}^{\boxed{ウエ}}k^2$　である。

2 $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{\boxed{オ}}n(n+1)(2n+1)$，$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{\boxed{カ}}n(n+1)$，$\sum_{k=1}^{n}(-3)=\boxed{キク}n$　より

$\sum_{k=1}^{n}(2k^2+k-3)=\frac{1}{\boxed{ケ}}n(n-1)(\boxed{コ}n+13)$　である。

3 数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とする。数列 $\{a_n\}$ が 1，2，5，10，17，…… であるとき，$\{b_n\}$ は 1，3，5，7，…… である。よって，$b_n=\boxed{サ}n-\boxed{シ}$　である。

よって，$b_5=\boxed{ス}$ であることから，$a_6=\boxed{セソ}$　である。

4 数列 $\{a_n\}$ が 2，6，12，20，30，…… であるとき，階差数列を $\{b_n\}$ とすると，

$b_n=\boxed{タ}n+\boxed{チ}$ である。よって，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=\boxed{ツ}+\sum_{k=1}^{n-1}(\boxed{タ}k+\boxed{チ})=n^2+n$$

$a_1=2$ より，この式は $n=1$ のときも成り立つ。

よって，$a_n=n^2+n$　である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ Note }

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第21講　数列の和と一般項，漸化式，数学的帰納法

§1 ▶ 数列の和と一般項

要点整理 と 公式

要点 1 数列の和の式から一般項を求める

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると，$a_1 = S_1$ である。

また，

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_{n-1} + a_n$$

$$S_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_{n-1}$$

である。よって，$S_n = S_{n-1} + a_n$ である。

したがって，以下のことが成り立つ。

■ 数列の和と一般項

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$a_1 = S_1$

$n \geqq 2$ のとき　$a_n = S_n - S_{n-1}$

(ex) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n が，$S_n = n^2 - 3n$ で表されているとき，

数列 $\{a_n\}$ の一般項を求める。

$a_1 = S_1 = 1^2 - 3 \cdot 1 = -2$ である。

また，$n \geqq 2$のとき

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$
$$= (n^2 - 3n) - \{(n-1)^2 - 3(n-1)\}$$
$$= (n^2 - 3n) - (n^2 - 5n + 4)$$
$$= 2n - 4$$

$a_1 = -2$ より，この式は $n = 1$ のときも成り立つ。

したがって，$a_n = 2n - 4$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ メモ }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が次のように与えられているとき，$\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$S_n = 3n^2 + 2n$　　　(2)　$S_n = 2^n - 1$

Point Pickup

和から一般項を求める

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると

初項について　$a_1 = S_1$　……①

$n \geqq 2$ のとき　$a_n = S_n - S_{n-1}$　……②

数列 $\{a_n\}$ の初項は①より求めることができる。

②の式において $n = 1$ を代入し，①の結果と一致するか確認することにより，

②が $n = 1$ でも成り立つかをチェックする。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

｛解答｝

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§2 ▶ 漸化式

要点整理 と 公式

要点2 漸化式

$a_1 = 1$, $a_{n+1} = 3a_n + 1$ で定義される数列を考える。

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 3a_1 + 1 = 3 \cdot 1 + 1 = 4$$
$$a_3 = 3a_2 + 1 = 3 \cdot 4 + 1 = 13$$
$$a_4 = 3a_3 + 1 = 3 \cdot 13 + 1 = 40$$

これを繰り返すと，この数列のすべての項が順に定義される。

このように，数列 $\{a_n\}$ の初項，または初項からいくつかの項と，それをもとにして順に次の項を定めるための規則を与えると，この数列のすべての項を順に定義することができる。これを「帰納的定義」という。

上の例においては，式　$a_{n+1} = 3a_n + 1$ によって規則が定められる。このように，前の項から次の項を定めるための関係式を「　　　　　」という。

※以後，断りのない限り，漸化式は $n = 1, 2, 3, \cdots\cdots$ で成り立つものとする。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ メモ }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2

次の初項と漸化式によって定まる数列 $\{a_n\}$ の最初の 5 項を求めよ。

(1)　$a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n - 2$　　(2)　$a_1 = 3,\ a_{n+1} = 3a_n - 2n$

Point Pickup

漸化式から順に項を求める

前の項から次の項を定めるための関係式を「漸化式」という。

この関係式と，初項(または初項からいくつかの項)によって，この数列のすべての項を順に求めることができる。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§3 ▶ 漸化式と一般項

要点整理 と 公式

要点 3 等差数列・等比数列を表す漸化式

等差数列の各項は，前の項に一定の数 d（公差）を足すことによって順次得られる。よって，等差数列を漸化式で表すと次のようになる。

$$a_{n+1} = a_n + d$$

この漸化式により，等差数列の公差 d が得られる。この漸化式と初項 a_1 により，等差数列の一般項を求めることができる。

（ex） $a_1 = 1$，$a_{n+1} = a_n + 2$　によって定まる数列 $\{a_n\}$ は，初項　　，公差　　の等差数列である。よって，$a_n =$

等比数列の各項は，前の項に一定の数 r（公比）を掛けることによって順次得られる。よって，等比数列を漸化式で表すと次のようになる。

$$a_{n+1} = ra_n$$

この漸化式により，等比数列の公比 r が得られる。この漸化式と初項 a_1 により，等比数列の一般項を求めることができる。

（ex） $a_1 = 3$，$a_{n+1} = 4a_n$ によって定まる数列 $\{a_n\}$ は，初項　　，公比　　の等比数列である。

よって，$a_n =$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

要点 4 $a_{n+1}=a_n+$(nの式)の形の漸化式

$a_{n+1}=a_n+$(n の式)の形をした漸化式は，$a_{n+1}-a_n=$（ n の式）と変形することができる。つまり，隣り合う 2 つの項の差が n の式，すなわち数列の一般項を表している。隣り合う 2 項の差を項とする数列を，もとの数列の「　　　　数列 」といった。上記の(n の式)は，階差数列の一般項を表す。

この階差数列の一般項を用いて，もとの数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めることができる。

(ex) $a_1=2$，$a_{n+1}=a_n+n-2$　によって定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求める。

$a_{n+1}=a_n+n-2$　より，$a_{n+1}-a_n=n-2$

よって，数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$b_n=n-2$　である。

したがって，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=2+\sum_{k=1}^{n-1}(k-2)=2+\frac{1}{2}(n-1)n-2(n-1)$$

$$=\frac{1}{2}(n^2-5n+8)$$

$a_1=2$ より，この式は $n=1$ のときも成り立つ。

よって，$a_n=\dfrac{1}{2}(n^2-5n+8)$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3

［1］　次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=-3$, $a_{n+1}=a_n+5$　　(2)　$a_1=9$, $a_{n+1}=3a_n$

［2］　次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=4$, $a_{n+1}=a_n+8n$　　(2)　$a_1=2$, $a_{n+1}=a_n+4^n$

Point Pickup

等差数列・等比数列を表す漸化式

$a_1=a$, $a_{n+1}=a_n+d$　は，初項 a，公差 d の等差数列を表す。

$a_1=a$, $a_{n+1}=ra_n$　は，初項 a，公比 r の等比数列を表す。

$a_{n+1}=a_n+$（n の式）の形の漸化式

$a_{n+1}-a_n=$（n の式）より，数列 $\{a_n\}$ の「階差数列」の一般項が（n の式）である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§4 数学的帰納法

要点整理 と 公式

要点 5 数学的帰納法

$a_n = 5^n - 2^n$ で表される数列 $\{a_n\}$ について，

$a_1 = 3,\quad a_2 = 21,\quad a_3 = 117,\quad a_4 = 609$

である。$21 = 3 \times 7$，$117 = 3 \times 39$，$609 = 3 \times 203$ より，数列 $\{a_n\}$ の初項から第 4 項までは 3 の倍数であることがわかる。では，数列 $\{a_n\}$ の項はすべて 3 の倍数であろうか。

ある事柄が，すべての自然数 n に対して成り立つことを，無数にある自然数 1 つ 1 つについて確かめることは不可能である。

さて，数列 $\{a_n\}$ において，$a_1 = 1$，$a_{n+1} = 2a_n + 3$ のように，初項と，前の項から次の項を定めるための関係式(「漸化式」)が与えられれば，順々にすべての項を定めることができる。これと同様に，ある命題①がすべての自然数 n について順々に成り立つことを確かめる方法として，次のような手順がある。

［1］ $n = 1$ のとき　命題①が成り立つ。

［2］ $n = k$ のとき　命題①が成り立つことを仮定すると，

$n = k + 1$ のときも命題①が成り立つ。

［1］，［2］が示されることにより，

［1］より，$n = 1$ のとき①は成り立つ。

［2］より，$n = 1$ のとき①が成り立つならば，$n = 2$ のときも①は成り立つ。

［2］より，$n = 2$ のとき①が成り立つならば，$n = 3$ のときも①は成り立つ。

以下同様にして，$n = 4,\ 5,\ 6,\ \cdots\cdots$ のときにも①は成り立ち，結果的にすべての自然数 n で①が成り立つことがいえる。

このような証明法を，「 数学的帰納法 」という。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(ex) $1+2+3+\cdots\cdots+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$ … ①　が成り立つことを，数学的帰納法で証明する。

[1]　$n=$ 　　のとき　　①の左辺 $=1$，　　①の右辺 $=\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 2=1$

よって，①は成り立つ。

[2]　$n=$ 　　のとき，①が成り立つと仮定すると

$$1+2+3+\cdots\cdots+k=\frac{1}{2}k(k+1)\cdots\cdots②$$

$n=k+1$ のとき，①の左辺は

$$1+2+3+\cdots\cdots+k+(k+1)$$

となる。これを②を用いて変形すると

$$\begin{aligned}1+2+3+\cdots\cdots+k+(k+1)&=\frac{1}{2}k(k+1)+(k+1)\\&=\frac{1}{2}k(k+1)+\frac{1}{2}\cdot 2(k+1)\\&=\frac{1}{2}(k+1)(k+2)\\&=\frac{1}{2}(k+1)\{(k+1)+1\}\end{aligned}$$

となり，$n=k+1$ のときの①の右辺と一致する。

よって，$n=k+1$ のときも①は成り立つ。

[1]，[2] より，すべての自然数 n について，①が成り立つ。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

4

数学的帰納法により，次の等式を証明せよ。

$$1+4+7+\cdots\cdots+(3n-2)=\frac{1}{2}n(3n-1)\cdots\cdots ①$$

Point Pickup

数学的帰納法による証明

すべての自然数 n である命題が成り立つことを証明する手順は以下。

［1］ $n=1$ のときに成り立つことを確認。

［2］ $n=k$ のときに成り立つことを仮定し，$n=k+1$ のときに成り立つことを示す。

とくに［2］において，左辺を変形して右辺を導くときは，$n=k+1$ のときの右辺の形をイメージしておくとよい。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第21講 確認テスト

1 初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=n^2$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項について，

$a_1=$ ア である。また，$n\geqq 2$ のとき $a_n=S_n-S_{n-1}=$ イ $n-$ ウ である。

よって，この式は $n=1$ のときも成り立つ。したがって，$a_n=$ イ $n-$ ウ である。

2 $a_1=2,\ a_{n+1}=2a_n-3\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ において，

$a_2=2a_1-3=$ エ，$a_3=$ オカ，$a_4=$ キク である。

3 (1) $a_1=-1,\ a_{n+1}=a_n+6$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n=$ ケ $n-$ コ である。

(2) $a_1=5,\ a_{n+1}=2a_n$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n=$ サ・シ $^{n-1}$ である。

4 $2+4+6+\cdots\cdots+2n=n(n+1)\cdots\cdots$ ① が成り立つことを数学的帰納法で示す。

［1］ $n=1$ のとき　①の左辺＝ ス，①の右辺＝ ス より①は成り立つ。

［2］ $n=k$ のとき，①が成り立つと仮定すると

$2+4+6+\cdots\cdots+2k=k(k+1)$

$n=k+1$ のとき，①の左辺を変形すると

$2+4+6+\cdots\cdots+2k+2(k+$ セ $)$

$=2+4+6+\cdots\cdots+2k+(2k+2)$

$=k(k+1)+(2k+2)$

$=(k+$ ソ $)(k+$ タ $)$　（ただし，ソ ＜ タ とする）

$=(k+1)\{(k+1)+1\}$

よって，$n=k+1$ のときも①は成り立つ。

［1］［2］より，①はすべての自然数 n で成り立つ。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ Note }

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第22講　平面上のベクトル

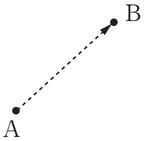
§1　ベクトル

要点整理 と 公式

要点1　有向線分とベクトル

長さや重さといった「量」は，単位を定めることで，5cm や 10kg のように 1 つの数値を用いてその「大きさ」を表すことができる。ここでは「移動」を伴う量について扱う。

平面上の A にあった点が，同じ平面上の B まで移動するとき，この「移動」を表すには，AB の間の「距離」だけでは不可能で，どの「向き」に移動したかということも必要となる。



このように，移動の向きに矢印がついた線分を「有向線分」という。

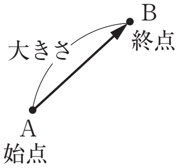
有向線分 AB において，

点 A を「　　　　」，点 B を「　　　　」

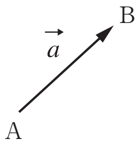
という。また，線分 AB の長さを，

有向線分 AB の「　　　　」(または長さ)

という。



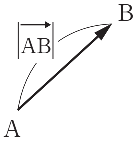
この有向線分を使って移動を表すとき，その向きと大きさが同じ有向線分は，同じ移動を表す。有向線分の位置を問わず，向きと大きさだけを考えたものを「　　　　　」という。



有向線分 AB が表すベクトルを「　　　　」と書く。または簡単に「$\vec{a}$」のように表すこともできる。

$\overrightarrow{AB}$ の大きさを，絶対値記号を用いて「　　　　」と表す。

$|\overrightarrow{AB}|$ は，有向線分 AB の長さである。



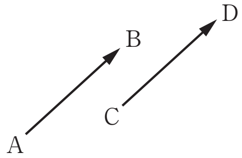
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

要点 2 ベクトルの相等と逆ベクトル

例えば，右図の有向線分 AB と有向線分 CD が向きが同じで大きさが等しいとき，この 2 つの有向線分はベクトルとしては同じものと考える。

2 つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の向きが同じで大きさが等しいとき，2 つのベクトルは「等しい」といい，「$\vec{a}=\vec{b}$」と表す。

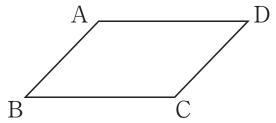
右の図において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ のとき，有向線分 AB を平行移動すると有向線分 CD と重ね合わせることができる。



(ex) 平行四辺形 ABCD において，

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\qquad}$　，　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\qquad}$

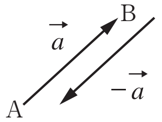
である。



また，ベクトル $\vec{a}$ と大きさが等しく，向きが逆のベクトルを，$\vec{a}$ の「逆ベクトル」といい，マイナスの符号をつけて「　　　　」と表す。

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=-\vec{a}$　である。

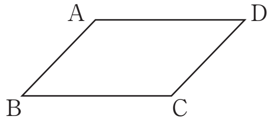
また，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-\overrightarrow{\mathrm{BA}}$　である。



(ex) 平行四辺形 ABCD において，

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\quad\overrightarrow{\mathrm{CD}}$,　　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\quad\overrightarrow{\mathrm{CB}}$

である。



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

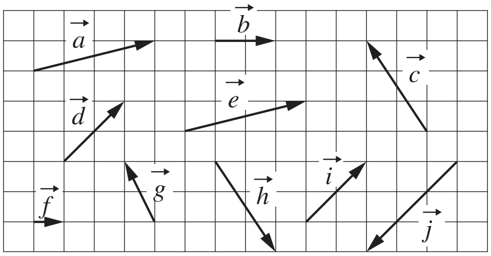
1

右の図において，次のようなベクトルの組を答えよ。

(1)　等しいベクトル

(2)　互いに逆ベクトル

(3)　向きが同じベクトル



Point Pickup

ベクトルの相等と逆ベクトル

2 つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が

・向きと大きさが一致　$\Longleftrightarrow$　$\vec{a}=\vec{b}$

・大きさが同じく向きが逆　$\Longleftrightarrow$　$\vec{a}=-\vec{b}$, $\vec{b}=-\vec{a}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

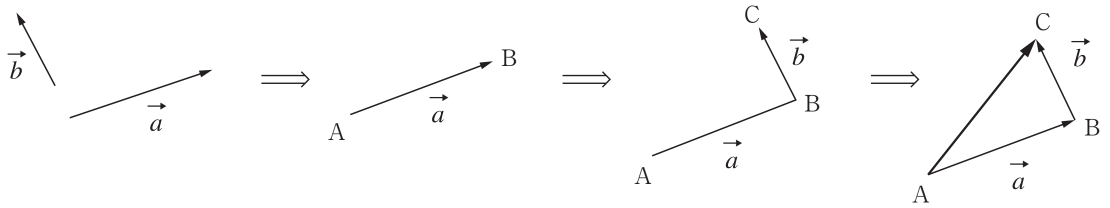
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§2 ▶ ベクトルの加法・減法

要点整理 と 公式

要点3 ベクトルの加法

2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ が与えられたとき，まず 1 点 A を定め，点 A を始点とし $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ となる終点 B をとり，さらに点 B を始点として $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ となる終点 C をとる。



このとき，$\overrightarrow{AC}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の「和」といい，「$\vec{a}+\vec{b}$」と表す。つまり，

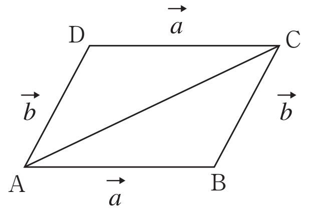
$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

である。

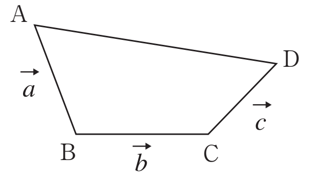
ベクトルの加法について，次の性質が成り立つ。

■ **ベクトルの加法の性質**

交換法則　$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$　　　結合法則　$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$



平行四辺形 ABCD

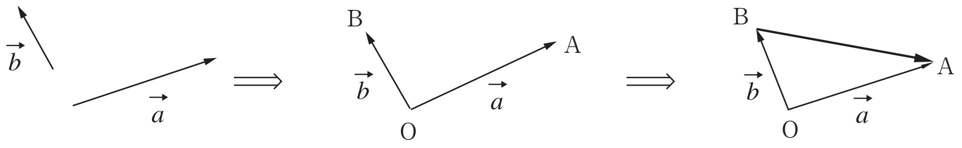


結合法則が成り立つことにより，3 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ の和を単に $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ と書く。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

要点4 ベクトルの減法

2つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ が与えられたとき，1点Oを定め，点Oを始点として $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ となる終点A，点Oを始点として $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ となる終点Bをとる。



このとき，ベクトル $\overrightarrow{BA}$ を $\vec{a}$ から $\vec{b}$ を引いた「差」といい，「$\vec{a} - \vec{b}$」と表す。つまり，

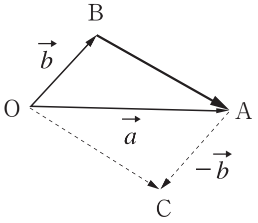
$$\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$$

である。

また，右図において，$\overrightarrow{AC} = -\vec{b}$ となる点Cをとると，

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \vec{a} - \vec{b}$$

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \vec{a} + (-\vec{b})$$



であり，また四角形OBACは平行四辺形となることから

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OC}$$

である。よって，次の等式が成り立つ。

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

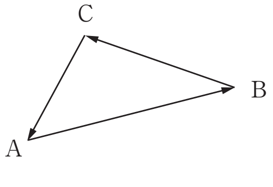
要点5 零ベクトル

始点と終点が一致したベクトル，すなわち「大きさが0」のベクトルを「零(れい)ベクトル」（またはゼロベクトル）といい，「　　」と表す。零ベクトルの向きは考えない。例えば $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ である。

零ベクトルについて，次のことが成り立つ。

$$\vec{a} - \vec{a} = \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0} \qquad \vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$$

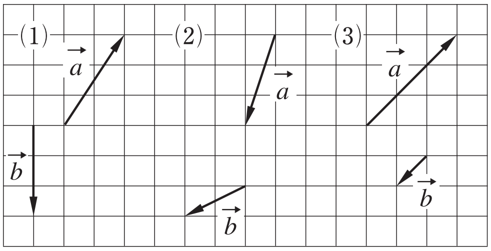
(ex)　$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{\quad\quad} + \overrightarrow{CA}$



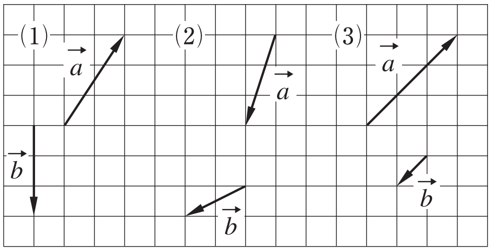
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2

［1］　次の(1)～(3)のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ について，$\vec{a}+\vec{b}$ を図示せよ。



［2］　次の(1)～(3)のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ について，$\vec{a}-\vec{b}$ を図示せよ。



Point Pickup

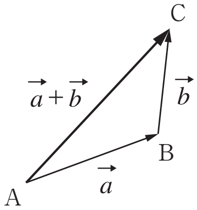
ベクトルの和

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の和 $\vec{a}+\vec{b}$ は，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ とすると

$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}$

である。

一方のベクトルの終点と，もう一方のベクトルの始点を合わせる。



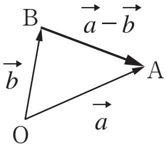
ベクトルの差

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の差 $\vec{a}-\vec{b}$ は，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とすると

$\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{BA}$

である。

2つのベクトルの始点を合わせる。



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§3 ▶ ベクトルの実数倍と計算

要点整理 と 公式

要点6 ベクトルの実数倍

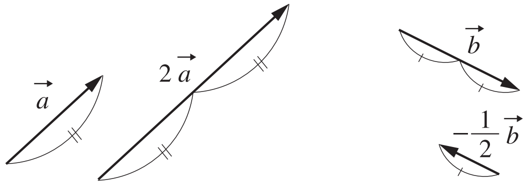
$\vec{0}$ でない $\vec{a}$ に対し，$\vec{a}$ の実数倍「 $k\vec{a}$ 」を次のように定義する。

［1］ $k>0$ のとき　$k\vec{a}$ は，$\vec{a}$ と向きが同じで，大きさが k 倍のベクトル

［2］ $k<0$ のとき　$k\vec{a}$ は，$\vec{a}$ と向きが反対で，大きさが $-k$ 倍のベクトル

［3］ $k=0$ のとき　$k\vec{a}=\vec{0}$

（ex）



※ $(-k)\vec{a}=-(k\vec{a})$ より，かっこを省略して $-k\vec{a}$ とかく。

また，$k\vec{0}=\vec{0}$　である。

要点7 ベクトルの計算

ベクトルの実数倍については，次の性質が成り立つ。

■ ベクトルの実数倍の性質

k，l を実数とする。

$k(l\vec{a})=(kl)\vec{a}=kl\vec{a}$　　$k\vec{a}+l\vec{a}=(k+l)\vec{a}$　　$k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$

ベクトルの加法・減法・実数倍の計算は，これまで学んだ性質により，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を文字 a，b と同じように扱って計算することができる。

（ex） $2\left(\vec{a}+3\vec{b}\right)+5\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)$

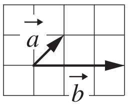
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ メモ }

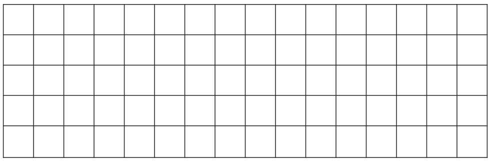
ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3

［1］　右の図のようにベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ が与えられたとき，次のベクトルを下の図に図示せよ。



(1)　$2\vec{a}$　　(2)　$-\frac{1}{3}\vec{b}$　　(3)　$3\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$



［2］　次の計算をせよ。

(1)　$4\vec{a}+3\vec{a}-5\vec{a}$　　(2)　$\vec{a}-2\vec{b}-3\vec{a}-\vec{b}$　　(3)　$3\left(\vec{a}-4\vec{b}\right)-2\left(\vec{a}-6\vec{b}\right)$

Point Pickup

ベクトルの実数倍

$\vec{a}$ の実数倍 $k\vec{a}$ について

向　き	$k>0$ … $\vec{a}$ と同じ	$k<0$ … $\vec{a}$ と反対
大きさ	$k>0$ … k 倍	$k<0$ … $-k$ 倍

ベクトルの計算

その性質から，$\vec{a}$, $\vec{b}$ を，文字 a, b と同じように計算することができる。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

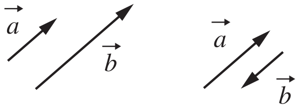
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§4 ▶ ベクトルの平行，ベクトルの分解

要点整理 と 公式

要点 8 ベクトルの平行

$\vec{0}$ ではない 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ において，$\vec{a}$，$\vec{b}$ の向きが同じ，または向きが反対であるとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は「 平行 」であるといい，「$\vec{a}$　　$\vec{b}$」とかく。

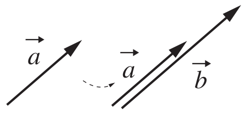


ベクトルの実数倍の定義から，次のことが成り立つ。

■ **ベクトルの平行**

$\vec{a} \neq \vec{0}$ かつ $\vec{b} \neq \vec{0}$ のとき

$\vec{a} \,/\!/\, \vec{b} \iff \vec{a} = k\vec{b}$ となる実数 k が存在する。



大きさが 1 のベクトルを「　　　　　　　　」という。

(ex) $|\vec{a}| = 3$　のとき，$\vec{a}$ と平行な単位ベクトルは　　$\vec{a}$ と　　　$\vec{a}$

要点 9 ベクトルの分解

一般に平面上の 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，次のことが成り立つ。

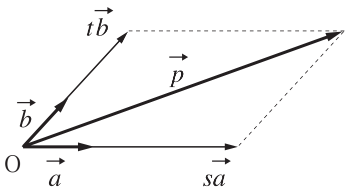
■ **ベクトルの分解**

2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，$\vec{a} \neq \vec{0}$，$\vec{b} \neq \vec{0}$ かつ $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でないとする。

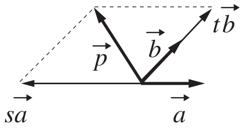
このとき，任意のベクトル $\vec{p}$ は，実数 s，t を用いて

$$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}$$

の形でただ 1 通りに表すことができる。



$s > 0$，　$t > 0$



$s < 0$，　$t > 0$

※ $\vec{a} \neq \vec{0}$，$\vec{b} \neq \vec{0}$　かつ $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行でないとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$ は「1 次独立」であるという。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ メモ }

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

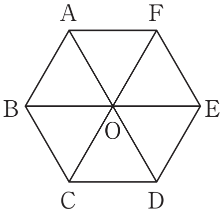
4

正六角形ABCDEF において，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とし，

対角線 BE と対角線 FC の交点を O とする。次のベクトルを

$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(1)　$\overrightarrow{FC}$　　(2)　$\overrightarrow{AO}$　　(3)　$\overrightarrow{BF}$



Point Pickup

ベクトルの平行

$\vec{a}\neq\vec{0}$ かつ $\vec{p}\neq\vec{0}$ のとき

$\vec{a}\,/\!/\,\vec{p}$　$\Longleftrightarrow$　$\vec{p}=k\vec{a}$ となる実数 k が存在する

これにより，与えられたベクトル $\vec{a}$ と平行なベクトル $\vec{p}$ を，$\vec{a}$ を用いて表すことができる。

ベクトルの分解

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ かつ $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でないとき（$\vec{a}$，$\vec{b}$ が 1 次独立であるとき）

任意のベクトル $\vec{p}$ は　$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$　の形で

ただ 1 通りに表すことができる。

ただし s，t の値は，図形を見るだけでは求められない場合もある。

よって，2 つのベクトルの

和　$\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AB}$　や　差　$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}$

を用いて，

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

のようにベクトルを「分割」するとよい。

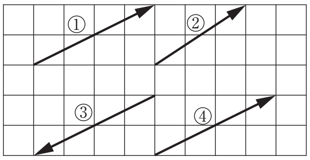
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第22講　確認テスト

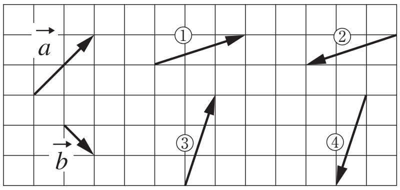
1 右の図で，ベクトル①と次の関係にあるベクトルを数字で答えよ。



(1)　等しいベクトル　[ア]

(2)　逆ベクトル　[イ]

2 右の図で，$\vec{a}+\vec{b}$ を表すベクトルは [ウ]，$\vec{a}-\vec{b}$ を表すベクトルは [エ] である。[ウ]，[エ] に当てはまるものを①～④から選び，数字で答えよ。

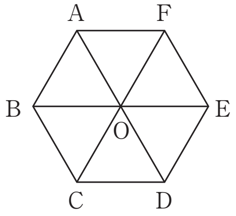


3 次の計算をせよ。

(1)　$\vec{a}-3\vec{a}+5\vec{a}=$ [オ] $\vec{a}$

(2)　$2(\vec{a}+3\vec{b})-(3\vec{a}+4\vec{b})=$ [カ] $\vec{a}+$ [キ] $\vec{b}$

4 正六角形 ABCDEF において，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とする。



(1)　$\overrightarrow{EB}=$ [クケ] $\vec{b}$ である

(2)　$\overrightarrow{AO}=$ [コ]，$\overrightarrow{FB}=$ [サ] である。[コ]，[サ] に当てはまるものを，下の①～④から選び，数字で答えよ。

①　$\vec{a}+\vec{b}$　　②　$\vec{a}-\vec{b}$　　③　$-\vec{a}+\vec{b}$　　④　$-\vec{a}-\vec{b}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ Note }

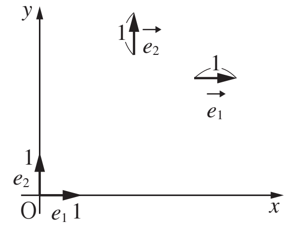
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第23講　ベクトルの成分表示，内積

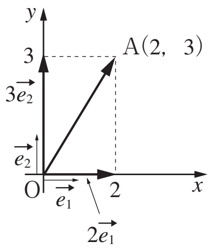
§1　ベクトルの成分

要点整理 と 公式

要点 1　基本ベクトルとベクトルの成分



原点を O とする座標平面上において，x 軸，y 軸の正の向きと同じ向きの単位ベクトル(大きさ 1 のベクトル)を，「基本ベクトル」といい，それぞれ $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$ で表す。$\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$ の始点を O とすると，終点の座標はそれぞれ(1，0)，(0，1)である。



座標平面上のベクトル $\vec{a}$ に対し，$\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ である点 A をとったとき，その座標が(2，3)であるならば，$\vec{a}$ は右図より

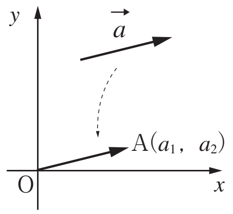
$$\vec{a} = 2\vec{e_1} + 3\vec{e_2}$$

と，基本ベクトル $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$ を用いてただ 1 通りに表される。

一般に，座標平面上のベクトル $\vec{a}$ に対し，$\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ である点 A をとり，その座標を (a_1，a_2) とすると，$\vec{a}$ は

$$\vec{a} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2}$$

と表される。



$\vec{a}$ が，基本ベクトル $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$ を用いて $\vec{a} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2}$ の形で表されるとき，a_1 を「x　　　」，a_2 を「y　　　」といい，

$$\vec{a} = (a_1,\ a_2)$$

と表す。この表し方を $\vec{a}$ の「　　　　　」という。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ とすると，$|\vec{a}|$ は線分 OA の長さであることより，以下のことがいえる。

■ 成分表示されたベクトルの大きさ

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$ のとき，$|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$

(ex) $\vec{a}=(2,\ -1)$ のとき

$|\vec{a}|=\sqrt{\quad\quad+\quad\quad}$

要点 2 ベクトルの相等と演算

成分表示された2つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ について，次のことが成り立つ。

■ 成分表示されたベクトルの相等と演算

$\vec{a}=\vec{b} \iff a_1=b_1,\ a_2=b_2$

$\vec{a}+\vec{b}=(a_1,\ a_2)+(b_1,\ b_2)=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$

$\vec{a}-\vec{b}=(a_1,\ a_2)-(b_1,\ b_2)=(a_1-b_1,\ a_2-b_2)$

$k\vec{a}=k(a_1,\ a_2)=(ka_1,\ ka_2)$　　ただし k は実数

(ex) $\vec{a}=(1,\ 1)$，$\vec{b}=(2,\ 3)$ のとき

$\vec{a}+\vec{b}=(1,\ 1)+(2,\ 3)=(1+2,\ 1+3)=(3,\ 4)$

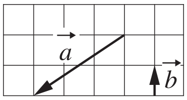
$4\vec{a}-2\vec{b}=4(1,\ 1)-2(2,\ 3)=(4,\ 4)-(4,\ 6)=(4-4,\ 4-6)=(0,\ -2)$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1

［1］　右の図の $\vec{a}$，$\vec{b}$ を成分で表し，

その大きさ $|\vec{a}|$，$|\vec{b}|$ を求めよ。



［2］　$\vec{a}=(2,\ -1)$，$\vec{b}=(-3,\ 2)$ のとき，次のベクトルを成分で表せ。

(1)　$\vec{a}-\vec{b}$　　　　(2)　$2\vec{a}+3\vec{b}$

Point Pickup

ベクトルの成分表示と大きさ

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$ のとき，　$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ とすると，点 A の座標は $(a_1,\ a_2)$ である。

よって，$|\vec{a}|=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$

成分表示されたベクトルの和・差・実数倍

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のとき

和　　$\vec{a}+\vec{b}=(a_1,\ a_2)+(b_1,\ b_2)=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$

差　　$\vec{a}-\vec{b}=(a_1,\ a_2)-(b_1,\ b_2)=(a_1-b_1,\ a_2-b_2)$

実数倍　　$k\vec{a}=k(a_1,\ a_2)=(ka_1,\ ka_2)$　　ただし k は実数

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

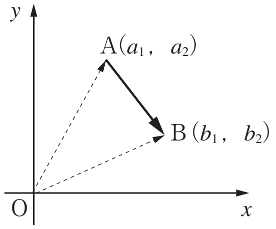
§2 ▸ 座標と成分表示

要点整理 と 公式

要点3　2点の座標とベクトルの成分

座標平面上の2点 A$(a_1,\ a_2)$，B$(b_1,\ b_2)$について，

$\overrightarrow{AB}$ の成分と大きさを考える。



$\overrightarrow{OA} = (a_1,\ a_2)$，$\overrightarrow{OB} = (b_1,\ b_2)$より，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\\ &= (b_1,\ b_2) - (a_1,\ a_2)\\ &= (b_1 - a_1,\ b_2 - a_2)\end{aligned}$$

以上より，次のことが成り立つ。

■ **座標と成分表示**

2点 A$(a_1,\ a_2)$，B$(b_1,\ b_2)$について

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1,\ b_2 - a_2)$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

成分表示されたベクトルは，x 軸方向，y 軸方向の移動量を表す。

よって，上記の $\overrightarrow{AB}$ の x 成分および y 成分は，点Aから点Bへの移動において，x 軸方向，y 軸方向にそれぞれどれだけ移動するかを表している。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ メモ }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2

座標平面上の 3 点 A (1, 3), B(5, 2), C (7, 4) について，次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ を成分で表し，その大きさを求めよ。

(2)　四角形 ABCD が平行四辺形になるような点 D の座標を求めよ。

Point Pickup

座標と成分表示

2 点 A(a_1, a_2), B(b_1, b_2)について

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1,\ b_2 - a_2) \qquad \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

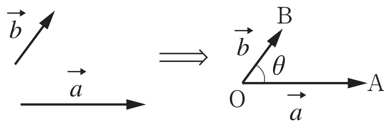
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§3 ▶ ベクトルの内積

要点整理 と 公式

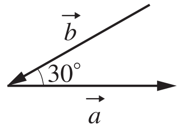
要点4 ベクトルのなす角

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ が与えられたとき，
点 O を始点として，$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ となるような
点 A，B をとる。このとき，∠AOB の大きさ θ を，
2 つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の「なす角」という。
ただし，$0 \leqq \theta \leqq 180°$ とする。



（ex）右の図において

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角は　　　　である。



要点5 ベクトルの内積

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が θ のとき，「 $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ 」を
$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の「 内積 」といい，「　　　　 」とかく。

■ ベクトルの内積

2 つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とすると

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

※ $\vec{a} = \vec{0}$ または $\vec{b} = \vec{0}$ のときは，$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ と定める。

（ex）$|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 3$, $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 45° のとき

$\vec{a}\cdot\vec{b} =$

内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ は，ベクトルではなく実数である。また，記号「・」は省略できない。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

要点6 ベクトルの垂直と内積

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が「 90° 」のとき，

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は「垂直」であるといい，$\vec{a} \perp \vec{b}$ とかく。

$\vec{a} \perp \vec{b}$ のとき

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right| \cos 90^\circ = \left|\vec{a}\right| \times \left|\vec{b}\right| \times 0 =$$

より，内積の値は 0 である。

これは逆についても成り立つ。したがって，以下のことがいえる。

■ ベクトルの垂直

$\vec{a} \neq \vec{0}$，$\vec{b} \neq \vec{0}$ のとき

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

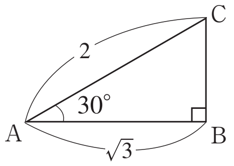
3

右の図において，次の内積を求めよ。

(1)　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

(2)　$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BC}$

(3)　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$



Point Pickup

ベクトルの内積

2つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とすると　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

なす角 θ を求めるときは，2つのベクトルの始点を揃える。

また，なす角 θ の範囲は $0\leqq\theta\leqq180^\circ$ である。

ベクトルの垂直

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき　$\vec{a}\perp\vec{b}\iff\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

｛解答｝

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§4 ▶ ベクトルの内積と成分

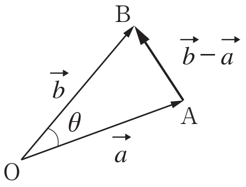
要点整理 と 公式

要点 7 成分表示されたベクトルの内積

成分表示された 2 つのベクトル $\vec{a} = (a_1,\ a_2)$, $\vec{b} = (b_1,\ b_2)$ について，内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を成分を用いて表す。

O を始点として　$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ となるように A，B をとり，

$\angle AOB = \theta$ とする。



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = OA \times OB \times \cos\theta \quad \cdots ①$$

また，△OAB において余弦定理より

$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \times OA \times OB \times \cos\theta$ より

$$OA \times OB \times \cos\theta = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2}$$

ここで

$OA^2 = |\vec{a}|^2 = (\qquad\qquad)^2 = a_1^2 + a_2^2$，$OB^2 = b_1^2 + b_2^2$

$\overrightarrow{AB} = (\qquad\quad ,\qquad\quad)$ より　$AB^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2$

したがって

$$OA \times OB \times \cos\theta = \frac{(a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2) - \{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2\}}{2}$$

$$= \frac{a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - (a_1^2 - 2a_1b_1 + b_1^2 + a_2^2 - 2a_2b_2 + b_2^2)}{2}$$

$$= \frac{2a_1b_1 + 2a_2b_2}{2} = a_1b_1 + a_2b_2 \quad \cdots ②$$

①，②より　$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$

この式は $\vec{a} = \vec{0}$　または　$\vec{b} = \vec{0}$　のときも成り立つ。

よって，以下のことが成り立つ。

■ 内積と成分

$\vec{a} = (a_1,\ a_2)$，$\vec{b} = (b_1,\ b_2)$ のとき

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(ex) $\vec{a}=(3,\ 2)$, $\vec{b}=(-2,\ 5)$ のとき

$\vec{a}\cdot\vec{b}=$

要点 8 ベクトルのなす角

2つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ について

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta$　より　$\cos\theta=$ ―――― である。

また，2つのベクトル　$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ について

$\left|\vec{a}\right|=$　　　　　,　　$\left|\vec{b}\right|=$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=$

である。したがって，次のことが成り立つ。

■ **ベクトルのなす角**

$\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のなす角を θ とすると

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$$

(ex) 2つのベクトル $\vec{a}=(2,\ 4)$, $\vec{b}=(-1,\ 3)$ のなす角 θ を求める。

$\left|\vec{a}\right|=$　　　　　,　　$\left|\vec{b}\right|=$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=$

よって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{10}{2\sqrt{5}\sqrt{10}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$　より　$\theta=$

また，$\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$ で，$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $b=(b_1,\ b_2)$ のとき

$$\vec{a}\perp\vec{b}\iff\vec{a}\cdot\vec{b}=0\iff a_1b_1+a_2b_2=0$$

である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

4

［1］ 次のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ の内積を求めよ。

(1) $\vec{a}=(3,\ 1)$, $\vec{b}=(0,\ 4)$　　(2) $\vec{a}=(2,\ 3)$, $\vec{b}=(6,\ -4)$

［2］ 2つのベクトル $\vec{a}=(2,\ -\sqrt{3})$, $\vec{b}=(1,\ 3\sqrt{3})$ のなす角 θ を求めよ。

Point Pickup

内積と成分

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のとき　$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$

ベクトルのなす角

$\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき，2つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のなす角を θ

とすると

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$$

特に　$\vec{a}\perp\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=0 \iff a_1b_1+a_2b_2=0$

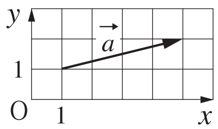
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第23講　確認テスト

1　(1)　右図において



$\vec{a} = (\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イ}})$，$|\vec{a}| = \sqrt{\boxed{\text{ウエ}}}$ である。

(2)　$\vec{a} = (-1,\ 1)$，$\vec{b} = (1,\ 2)$ のとき，$\vec{a} + \vec{b} = (\boxed{\text{オ}},\ \boxed{\text{カ}})$，

$-2\vec{a} + 3\vec{b} = (\boxed{\text{キ}},\ \boxed{\text{ク}})$ である。

2　2 点 $\mathrm{A}(-3,\ 4)$，$\mathrm{B}(2,\ 0)$ について，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (\boxed{\text{ケ}},\ \boxed{\text{コサ}})$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \sqrt{\boxed{\text{シス}}}$ である。

3　$|\vec{a}| = 6$，$|\vec{b}| = 5$，$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角が 60° のとき，$\vec{a}\cdot\vec{b} = \boxed{\text{セソ}}$ である。

4　$\vec{a} = (-1,\ \sqrt{3})$，$\vec{b} = (-3,\ \sqrt{3})$ のとき，$\vec{a}\cdot\vec{b} = \boxed{\text{タ}}$ である。

また，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とすると，$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{チ}}}}{\boxed{\text{ツ}}}$ より，$\theta = \boxed{\text{テト}}^\circ$ である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ Note }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第24講　内積の利用，位置ベクトル，ベクトル方程式

§1　内積の性質とその利用

要点整理 と 公式

要点1 内積の性質

ベクトルの内積について，次の性質が成り立つ。

■ **内積の性質**

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

$(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k\vec{a}\cdot\vec{b}$　　　ただし k は実数

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$　　　$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

上記の性質は，$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$，$\vec{c}=(c_1,\ c_2)$ などとおくことによって証明できる。

また，$\vec{0}$ でないベクトル $\vec{a}$ について，$\vec{a}$ と $\vec{a}$ のなす角は $0°$ であることより

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}||\vec{a}|\cos 0°=|\vec{a}||\vec{a}|\times 1=|\vec{a}|^2$$

これは，$\vec{a}=\vec{0}$ のときも成り立つ。

よって，以下の性質が成り立つ。

■ **内積の性質（ベクトルの大きさと内積）**

$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$

(ex)　$2\vec{a}\cdot(3\vec{a}-4\vec{b})$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ メモ }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1

［1］　次の等式が成り立つことを証明せよ。

(1)　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{c}+\vec{d})=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{d}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{d}$

(2)　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$

(3)　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

［2］　$|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=4$　のとき，$|\vec{a}+\vec{b}|$　の値を求めよ。

Point Pickup

内積の性質と計算

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$　　　$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$

$(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k\vec{a}\cdot\vec{b}$　　　ただし k は実数

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$　　　$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

これらを用いて，内積の計算を，文字式の展開と同じように行うことができる。

ただし，内積の記号「・」は省略できない。

また，$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$　より，同じベクトルの内積 $\Longleftrightarrow$ ベクトルの大きさの２乗

ベクトルの大きさと内積

$|\vec{a}|^2=\vec{a}\cdot\vec{a}$ より，ベクトルの大きさの２乗 $\Longleftrightarrow$ 同じベクトルの内積である。

これを用いて，$s\vec{a}+t\vec{b}$ の形で表されたベクトルの大きさ $|s\vec{a}+t\vec{b}|$ は

$$|s\vec{a}+t\vec{b}|^2=(s\vec{a}+t\vec{b})\cdot(s\vec{a}+t\vec{b})$$

のように，２乗すると「内積の計算」を行うことができる。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

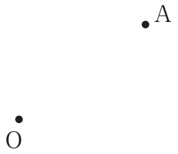
｛解答｝

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§2 ▶ 位置ベクトル

要点整理 と 公式

要点 2 位置ベクトル



平面上の点の位置を，ベクトルで表す。

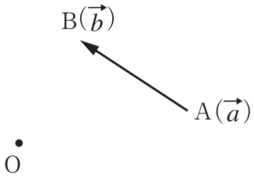
平面上で 1 点 O を固定し，この点を基準とすると，点 A の位置は

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$

で表すことができる。つまり，基準点 O からの点 A までの移動の向きと大きさをベクトルで表すことができる。

このようなベクトル $\vec{a}$ を，点 O に関する点 A の「位置ベクトル」という。

また，位置ベクトルが $\vec{a}$ である点を「 A(　　)」と表す。



(ex) 2 点 A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$) に対し，

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} =$

※位置ベクトルにおける点 O はどこに定めてもよい。

また今後，特に断らない限り，点 O に関する位置ベクトルを考える。

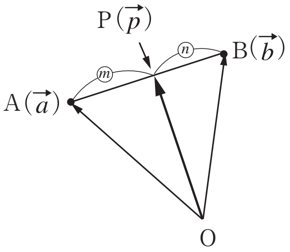
要点 3 分点の位置ベクトル

A($\vec{a}$)，B ($\vec{b}$) を結ぶ線分 AB を $m:n$ に内分する点 P の位置ベクトルを $\vec{p}$ とすると，

$$\vec{p} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

$$= \vec{a} + \frac{m}{m+n}(\vec{b} - \vec{a})$$

$$= \frac{(m+n)\vec{a} + m(\vec{b} - \vec{a})}{m+n} = \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n}$$

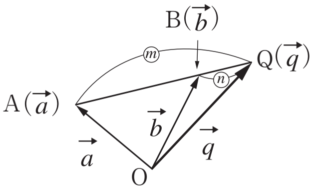


したがって，$\vec{p} = \dfrac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n}$　である。

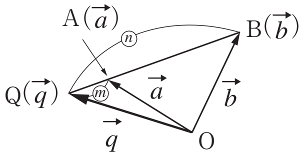
同様に，線分 AB を $m:n$ に外分する点 Q の位置ベクトルを $\vec{q}$ とすると

$$\vec{q} = \frac{-n\vec{a} + m\vec{b}}{m-n}$$

である。



$m > n$



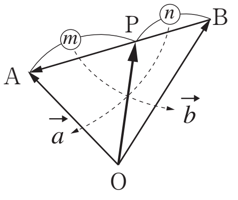
$m < n$

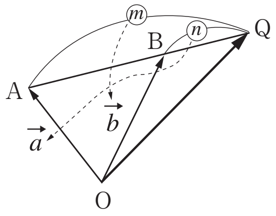
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

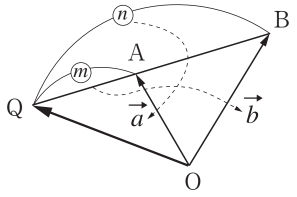
■ 内分点，外分点の位置ベクトル

2 点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$ に対し，線分 AB を $m:n$ に内分する点 P の位置ベクトルを $\vec{p}$，外分する点 Q の位置ベクトルを $\vec{q}$ とすると，

$$\vec{p}=\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n} \qquad\qquad \vec{q}=\frac{-n\vec{a}+m\vec{b}}{m-n}$$







$m>n$　　　　$m<n$

特に，線分 AB の中点 M の位置ベクトル $\vec{m}$ は　$\vec{m}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

(ex)　2 点 A$(\vec{a})$，B $(\vec{b})$ に対し，線分 AB を

3：2 に内分する点 P の位置ベクトル $\vec{p}$ は　$\vec{p}=\dfrac{\quad\vec{a}+\quad\vec{b}}{\quad+\quad}$

3：2 に外分する点 Q の位置ベクトル $\vec{q}$ は　$\vec{q}=\dfrac{\quad\vec{a}+\quad\vec{b}}{\quad-\quad}$

$\vec{p}=\dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}=\dfrac{n}{m+n}\vec{a}+\dfrac{m}{m+n}\vec{b}$ であり，$\dfrac{n}{m+n}+\dfrac{m}{m+n}=\dfrac{m+n}{m+n}=1$　である。

よって，$\dfrac{m}{m+n}=t$　とおくと，$t+\dfrac{n}{m+n}=1$　より，$\dfrac{n}{m+n}=1-t$　と表される。

したがって，$m:n=\dfrac{m}{m+n}:\dfrac{n}{m+n}=t:(1-t)$ である。

このことから，線分 AB を内分する点 P の位置ベクトル $\vec{p}$ は，

文字 t を用いて次のように表すことができる。

$$\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2

［1］　2 点 A $(\vec{a})$，B$(\vec{b})$ を結ぶ線分ABについて，次の点の位置ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(1)　3：1 に内分する点の位置ベクトル $\vec{p}$，3：1 に外分する点の位置ベクトル $\vec{q}$

(2)　2：5 に内分する点の位置ベクトル $\vec{p}$，2：5 に外分する点の位置ベクトル $\vec{q}$

［2］　3 点 A $(\vec{a})$，B $(\vec{b})$，C $(\vec{c})$ を頂点とする △ABC の重心 G の位置ベクトル $\vec{g}$ は

$$\vec{g}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

と表されることを示せ。

Point Pickup

内分点，外分点を表す位置ベクトル

2 点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$ に対し，線分 AB を $m:n$ に

内分する点 P の位置ベクトル $\vec{p}$ は　$\vec{p}=\dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$

外分する点 Q の位置ベクトル $\vec{q}$ は　$\vec{q}=\dfrac{-n\vec{a}+m\vec{b}}{m-n}=\dfrac{n\vec{a}-m\vec{b}}{-m+n}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§3 ▶ 一直線上の点

要点整理 と 公式

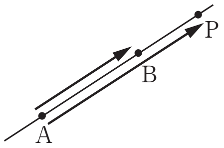
要点 4 一直線上にある３点

　3 点 A，B，P が一直線上にある条件を考える。

　3 点 A，B，P が一直線上にあるとき，

直線 AB 上に点 P がある，と考えることができる。

これをベクトルを用いて表すと，実数 k を用いて



$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \qquad \overrightarrow{\mathrm{AB}}$

と表される。つまり，「始点がともに A 」である 2 つのベクトルを用いることで，

ベクトルの実数倍の定義より，3 点が一直線上にある条件を表すことができる。

　また逆に，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を満たす実数 k が存在するとき，点 P は直線 AB 上にある，つまり 3 点 A，B，P が一直線上にある。

　よって，以下のことが成り立つ。

■ 一直線上の点

3 点 A，B，P が一直線上にある。

$\Longleftrightarrow$ 直線 AB 上に点 P がある。

$\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = k\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を満たす実数 k が存在する。

(ex) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{a} + 3\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \dfrac{1}{3}\vec{a} + \vec{b}$ のとき

$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \dfrac{1}{3}\left(\qquad\qquad \right) = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

よって，3 点 A，B，P は同一直線上にある。

また，AP：PB＝　　　　である。

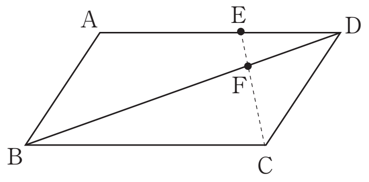
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ メモ }

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3

平行四辺形 ABCD において，辺 AD を 3：2 に内分する点を E，対角線 BD を 5：2 に内分する点を F とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ として，次の問いに答えよ。



(1)　$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{AF}$ を $\vec{b}$，$\vec{d}$ で表せ。

(2)　3 点 E，F，C は一直線上にあることを示せ。

Point Pickup

3 点が一直線上にあることの証明

3 点 P，Q，R が一直線上にある。

$\iff$　$\overrightarrow{PQ}=k\overrightarrow{PR}$　を満たす実数 k が存在する。

よって，3 点のうち「いずれか 1 点を始点」とする 2 つのベクトルを求め，一方がもう一方の何倍になっているかを考える。

ベクトルの性質を利用する図形の問題

ベクトルの和，差，実数倍や，分点（内分点，外分点）の考え方を用いて，それぞれの点を，「図形上のある 1 点」に関する「位置ベクトル」の形にする。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

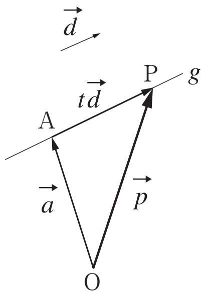
{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§4 ▶ ベクトル方程式

要点整理 と 公式

要点5 直線と方向ベクトル



点 A$(\vec{a})$ を通り，$\vec{0}$ でないベクトル $\vec{d}$ に平行な直線 を g とする。

点 P が g 上にあるとき

$\overrightarrow{AP} = t\vec{d}$

となる実数 t が存在する。ここで，$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$　であることより

$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d}$　……①

と表すことができる。

①において，t の値を1つ決めると，それに応じて直線 g 上にある点 P$(\vec{p})$ の位置が 1 つ決まる。逆に，直線 g 上の点 P の位置を決めると，実数 t の値が 1 つ決まる。t がすべての実数値をとって変化すると，点 P は直線 g 上のすべての点を動き，その軌跡は直線 g となる。

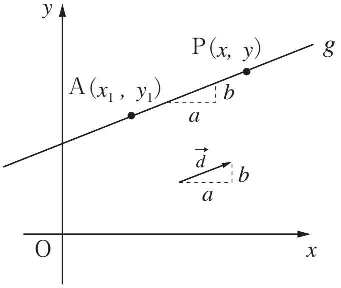
この①を直線 g の「ベクトル方程式」といい，実数 t を「媒介(ばいかい)変数」という。また，$\vec{d}$ を直線 g の「　　　　　　　」という。

■ ベクトル $\vec{d}$ に平行な直線

点 A $(\vec{a})$ を通り，$\vec{0}$ でないベクトル $\vec{d}$ に平行な直線のベクトル方程式は

$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d}$

要点6 直線の媒介変数表示



2 点 A，P の座標を A(x_1, y_1)，P(x, y)とし，$\vec{d} = (a, b)$ とする。直線のベクトル方程式　$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d}$　を成分で表してみよう。

$\vec{a} = (x_1, y_1)$，$\vec{p} = (x, y)$ より

$(x, y) = (x_1, y_1) + t(a, b) = (x_1 + at, y_1 + bt)$

となる。よって，直線 g の方程式は

$$\begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \end{cases} \quad \cdots ②$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

と表すことができる。この式②を直線 g の「媒介変数表示」という。

さらに $a \neq 0$ のとき，②から媒介変数 t を消去し整理すると

$$y = \frac{b}{a}(x - x_1) + y_1$$

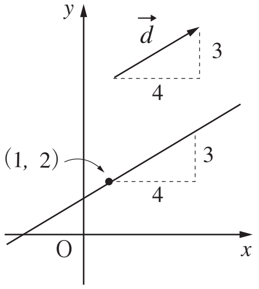
となる。この式から，②は $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$ を通り，傾き $\dfrac{b}{a}$ の直線の方程式を表すことがわかる。

(ex) 点$(1,\ 2)$を通り，$\vec{d} = (4,\ 3)$ を方向ベクトルとする。

直線を媒介変数表示で表す。

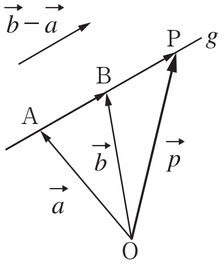
$(x,\ y) = (\quad,\quad) + t(\quad,\quad) = (1 + 4t,\ 2 + 3t)$

よって，$\begin{cases} x = \\ y = \end{cases}$



※方向ベクトル $\vec{d} = (a,\ b)$ は $a = 0$ をとり得る。$a = 0$ のときは，②は直線 $x = x_1$ を表す。

要点 7　2 点を通る直線のベクトル方程式



2 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$ を通る直線 g のベクトル方程式は，

その方向ベクトルが $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b} - \vec{a}$ であることから，

$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d} = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a})$

つまり　$\vec{p} = (1 - t)\vec{a} + t\vec{b}$　と表される。

これは点 P が，線分 AB を $t : (1 - t)$ に分ける点であることを表している。

■ 2点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$ を通る直線

2 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$を通る直線のベクトル方程式は

$\vec{p} = (1 - t)\vec{a} + t\vec{b}$

(ex) 2 点 $\mathrm{A}(2,\ 8)$，$\mathrm{B}(7,\ 4)$ を通る直線を媒介変数表示で表すと

$(x,\ y) = (\qquad)(2,\ 8) + \quad(7,\ 4) = (2 + 5t,\ 8 - 4t)$

よって，

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

4

次の条件を満たす直線の方程式を，媒介変数を t とする媒介変数表示で表せ。

(1)　点 A (2,　−3) を通り，$\vec{d} = (-1,\ 5)$ に平行な直線

(2)　2 点 A(−1,　6)，B(2,　1) を通る直線

Point Pickup

直線のベクトル方程式

点 $\mathrm{A}(\vec{a})$ を通り，$\vec{0}$ でないベクトル $\vec{d}$ に平行な直線　　$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d}$

2 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$ を通る直線　　$\vec{p} = (1 - t)\vec{a} + t\vec{b}$

直線の媒介変数表示は，直線上の点 P の座標を $(x,\ y)$ とおき，ベクトルを成分表示して求める。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第24講　確認テスト

1　$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=2$　のとき，$|\vec{a}-\vec{b}|$ の値を求める。

$|\vec{a}-\vec{b}|^{\boxed{\text{ア}}}=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-\boxed{\text{イ}}\,\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=3^2-\boxed{\text{イ}}\times 2+1^2=\boxed{\text{ウ}}$

である。

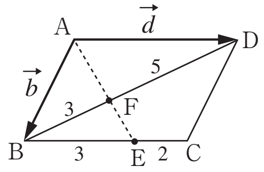
$|\vec{a}-\vec{b}|\geqq 0$　より　$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}$　である。

2　2点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$ を結ぶ線分 AB を 4：3 に内分する点 P の位置ベクトル $\vec{p}$ は

$\vec{p}=\dfrac{\boxed{\text{エ}}\,\vec{a}+\boxed{\text{オ}}\,\vec{b}}{\boxed{\text{カ}}}$，4：3 に外分する点 Q の位置ベクトル $\vec{q}$ は

$\vec{q}=-\boxed{\text{キ}}\,\vec{a}+\boxed{\text{ク}}\,\vec{b}$　である。

3　平行四辺形 ABCD において，辺 BC を 3：2 に内分する点を E，対角線 BD を 3：5 に内分する点を F とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$



とすると，$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\overrightarrow{BC}=\vec{b}+\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\vec{d}$　である。

また，$\overrightarrow{AF}=\dfrac{\boxed{\text{サ}}\,\vec{b}+\boxed{\text{シ}}\,\vec{d}}{8}=\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{8}\vec{b}+\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{8}\vec{d}=\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{8}\left(\vec{b}+\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\vec{d}\right)$　である。

よって，$\overrightarrow{AF}=\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{8}\overrightarrow{AE}$ より 3 点 A，F，E は一直線上にある。

4　点 A(2，3)を通り，ベクトル $\vec{d}=(5,\ 4)$ に平行な直線を媒介変数表示で表すと

$$\begin{cases} x=\boxed{\text{ス}}+\boxed{\text{セ}}\,t \\ y=\boxed{\text{ソ}}+\boxed{\text{タ}}\,t \end{cases}$$

である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ Note }

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第25講　空間のベクトル

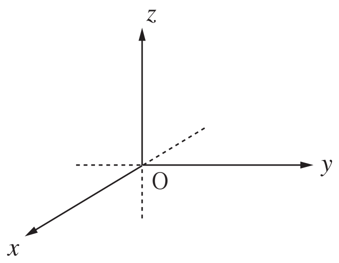
§1　空間の座標

要点整理 と 公式

要点 1 空間座標

平面座標と同じように，空間内の点についても座標を考えることができる。

原点 O を定め，O を通り互いに垂直な 3 本の数直線をひき，これを右の図のように「x 軸」，「y 軸」，「　　軸」と定める。これらをまとめて「座標軸」という。



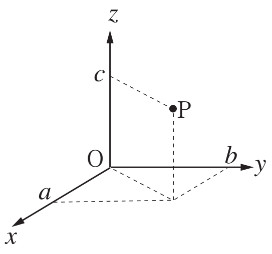
x 軸と y 軸が定める平面を「　　　平面」

y 軸と z 軸が定める平面を「　　　平面」

z 軸と x 軸が定める平面を「　　　平面」

といい，これらをまとめて「 座標平面 」という。

この空間内の任意の点を P とし，P から xy 平面に垂線 PQ をひき，点 Q の xy 平面での座標を$(a,\ b)$とする。さらに，点 P から z 軸に垂線 PR をひき，R の z 軸上での座標を c とすれば，点 P に対して 3 つの実数値の組 $(a,\ b,\ c)$ が定まる。



この $(a,\ b,\ c)$ を点 P の「座標」といい，P$(a,\ b,\ c)$ と表す。

また，この $a,\ b,\ c$ を点 P の「x 座標」，「y 座標」，「　　座標」という。

このように座標が $(a,\ b,\ c)$ で定められた空間を「座標空間」という。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ メモ }

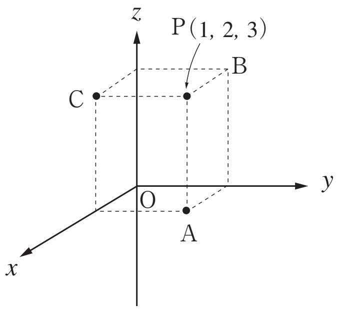
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1

点 P(1, 2, 3) から，xy 平面，yz 平面，zx 平面に下ろした垂線をそれぞれ PA，PB，PC とする。

(1)　3 点 A，B，C の座標を求めよ。

(2)　点 P と xy 平面に関して対称な点 Q の座標を求めよ。



Point Pickup

空間における点の座標

xy 平面上の点 … z 座標が 0

yz 平面上の点 … x 座標が 0

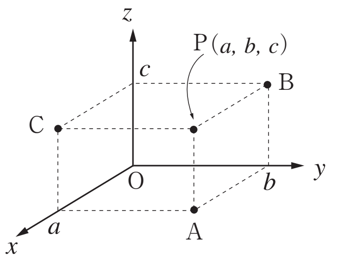
zx 平面上の点 … y 座標が 0

点 P (a, b, c) について，点 P から

xy 平面に垂線 PA を下ろすと　A (a, b, 0)

yz 平面に垂線 PB を下ろすと　B (0, b, c)

zx 平面に垂線 PC を下ろすと　C (a, 0, c)



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

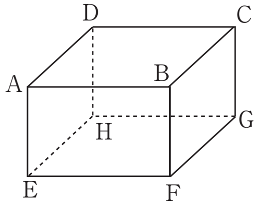
§2 ▶ 空間のベクトル

要点整理 と 公式

要点2 空間のベクトル

平面におけるベクトルと同様に，空間においてその位置を問題にせず，向きと大きさを考えたものを空間のベクトルという。空間の有向線分 AB の表すベクトルを $\overrightarrow{AB}$，その大きさを $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ で表す。

2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ の向きと大きさが一致するとき，この 2 つのベクトルは「等しい」といい，$\vec{a}=\vec{b}$ と表す。



(ex) 右図の直方体において

$\overrightarrow{AB}=$

$\overrightarrow{AD}=$

$\overrightarrow{AE}=$

平面のベクトルにおいて成り立つ性質は，空間のベクトルにおいてもまったく同様に成り立つ。

交換法則　$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$　　結合法則　$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$　　$\vec{a}-\vec{a}=\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$　　$\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$

k，l を実数とするとき

$k(l\vec{a})=(kl)\vec{a}=kl\vec{a}$　　$k\vec{a}+l\vec{a}=(k+l)\vec{a}$　　$k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$

また，ベクトルの和，差，零ベクトル，逆ベクトルについても同様である。

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$　　$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{AA}=\vec{0}$　　$\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$

一般に，同一平面上にない 3 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ について，空間の任意のベクトル $\vec{p}$ は実数 s，t，u を用いて

$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$

の形でただ 1 通りに表すことができる。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ メモ }

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2

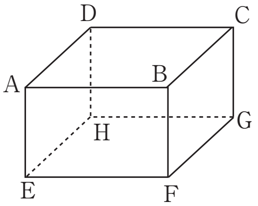
直方体 ABCD − EFGH において，

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{c}$ とおく。

次のベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AF}}$　　(2) $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{FC}}$　　(4) $\overrightarrow{\mathrm{CE}}$



Point Pickup

ベクトルの分解

同一平面上にない 3 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ について，空間の任意のベクトル $\vec{p}$ は

実数 s，t，u を用いて $\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ の形でただ 1 通りに表すことができる。

ベクトルの和や差の性質を用いて

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{CB}}$，　　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

のようにベクトルを「分割」するとよい。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

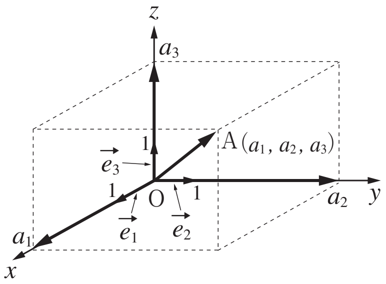
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§3 ベクトルの成分と演算，座標と成分表示

要点整理 と 公式

要点3 空間のベクトルにおける成分と演算

原点をOとする座標平面上において，x軸，y軸，z軸の正の向きと同じ向きの単位ベクトル(大きさ1のベクトル)を，「基本ベクトル」といい，それぞれ$\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$，$\vec{e_3}$で表す。



$\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$，$\vec{e_3}$の始点をOとすると，終点の座標はそれぞれ(1，0，0)，(0，1，0)，(0，0，1)である。

座標空間上のベクトル$\vec{a}$に対し，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$である点Aをとり，その座標を($a_1$，$a_2$，$a_3$)とすると，$\vec{a}$は

$$\vec{a}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}+a_3\vec{e_3}$$

と表される。このとき，a_1を「x成分」，a_2を「y成分」，a_3を「　　成分」といい，

$$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$$

と表す。この表し方を$\vec{a}$の「成分表示」という。

$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$とすると，$|\vec{a}|$は線分OAの長さであることより，以下のことがいえる。

■ 成分表示されたベクトルの大きさ

$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$のとき，$|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$

(ex) $\vec{a}=(2,\ -1,\ 3)$のとき

$$|\vec{a}|=\sqrt{\qquad+\qquad+\qquad}$$

要点4 ベクトルの相等と演算

成分表示された2つのベクトル$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$について，次のことが成り立つ。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

■ **成分表示されたベクトルの相等と演算**

$\vec{a} = \vec{b} \iff a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ a_3 = b_3$

$\vec{a} + \vec{b} = (a_1,\ a_2,\ a_3) + (b_1,\ b_2,\ b_3) = (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ a_3 + b_3)$

$\vec{a} - \vec{b} = (a_1,\ a_2,\ a_3) - (b_1,\ b_2,\ b_3) = (a_1 - b_1,\ a_2 - b_2,\ a_3 - b_3)$

$k(a_1,\ a_2,\ a_3) = (ka_1,\ ka_2,\ ka_3)$　　　ただし k は実数

(ex) $\vec{a} = (1,\ 1,\ 2)$，$\vec{b} = (2,\ 3,\ -2)$ のとき

$\vec{a} + \vec{b} =$

$4\vec{a} - 2\vec{b} =$

要点 5 座標と成分表示

座標平面上の２点 A $(a_1,\ a_2,\ a_3)$，B $(b_1,\ b_2,\ b_3)$ について，

$\overrightarrow{AB}$ の成分と大きさを考える。

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (b_1,\ b_2,\ b_3) - (a_1,\ a_2,\ a_3) = (b_1 - a_1,\ b_2 - a_2,\ b_3 - a_3)$

以上より，次のことが成り立つ。

■ **座標と成分表示**

２点 A $(a_1,\ a_2,\ a_3)$，B $(b_1,\ b_2,\ b_3)$ について

$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1,\ b_2 - a_2,\ b_3 - a_3)$

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$

成分表示されたベクトルは，x 軸方向，y 軸方向，z 軸方向の移動量を表す。

よって，上記の $\overrightarrow{AB}$ の x 成分および y 成分および z 成分は，点 A から点 B への移動において，x 軸方向，y 軸方向，z 軸方向にそれぞれどれだけ移動するかを表している。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3

［1］ $\vec{a}=(1,\ -1,\ 1)$，$\vec{b}=(2,\ 0,\ -2)$ のとき，$3\vec{a}-2\vec{b}$ を成分で表せ。また，その大きさを求めよ。

［2］ 2 点 A$(3,\ 4,\ -5)$，B$(1,\ 2,\ 3)$について，$\overrightarrow{AB}$ を成分で表せ。また，その大きさを求めよ。

Point Pickup

ベクトルの成分表示と大きさ，和・差・実数倍

$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ のとき

$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$

和　$\vec{a}+\vec{b}=(a_1,\ a_2,\ a_3)+(b_1,\ b_2,\ b_3)=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3)$

差　$\vec{a}-\vec{b}=(a_1,\ a_2,\ a_3)-(b_1,\ b_2,\ b_3)=(a_1-b_1,\ a_2-b_2,\ a_3-b_3)$

実数倍　$k(a_1,\ a_2,\ a_3)=(ka_1,\ ka_2,\ ka_3)$　ただし k は実数

座標と成分表示

2 点 A$(a_1,\ a_2,\ a_3)$，B$(b_1,\ b_2,\ b_3)$について

$\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1,\ b_2-a_2,\ b_3-a_3)$，$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§4 ベクトルの内積となす角

要点整理 と 公式

要点6 空間のベクトルにおける内積

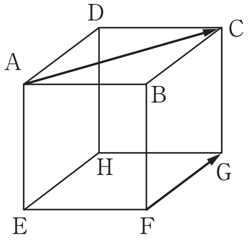
空間の $\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ について，なす角 θ を平面と同様に定義し，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ についても

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta$$

と平面同様に定義する。$\vec{a}=\vec{0}$　または　$\vec{b}=\vec{0}$ のときは，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ と定める。

（ex）1辺の長さが2の立方体 ABCD − EFGH において

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$$
$$=\left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\overrightarrow{AD}\right|\cos 45^\circ$$
$$=2\sqrt{2}\times 2\times\frac{1}{\sqrt{2}}=4$$



要点7 成分で表されたベクトルの内積

平面の場合と同様，余弦定理を用いることにより，次のことが成り立つ。

■ 内積と成分

$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ のとき

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

（ex）$\vec{a}=(3,\ 2,\ 1)$，$\vec{b}=(-2,\ 5,\ 0)$ のとき

$\vec{a}\cdot\vec{b}=$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

また，なす角 θ について次のことが成り立つ。

■ ベクトルのなす角

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ のなす角を θ とすると

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\ \sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

(ex) 2 つのベクトル $\vec{a}=(2,\ 4,\ 2)$，$\vec{b}=(2,\ 1,\ -1)$ のなす角 θ を求める。

$\left|\vec{a}\right|=$　　　　　　　　　　，$\left|\vec{b}\right|=$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=$

よって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{6}{2\sqrt{6}\times\sqrt{6}}=\dfrac{1}{2}$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$　より　$\theta=$

また，$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ で，$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ のとき

$$\vec{a}\perp\vec{b}\iff\vec{a}\cdot\vec{b}=0\iff a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$$

である。

また，平面と同様，次の性質が成り立つ。

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$　　　$\vec{a}\cdot\vec{a}=\left|\vec{a}\right|^2$

$(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k\vec{a}\cdot\vec{b}$　　ただし k は実数

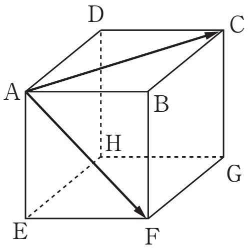
$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$　　$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

4

［1］ 1 辺の長さが 3 の立方体 ABCD − EFGH において，内積 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AF}$ を求めよ。

［2］ A(4, 3, 6)，B(2, 1, 2)，C(4, 1, 4)を頂点とする △ABC において，∠ABCの大きさを求めよ。



Point Pickup

ベクトルの内積となす角

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b} = (b_1,\ b_2,\ b_3)$ について，

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

また，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とすると

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

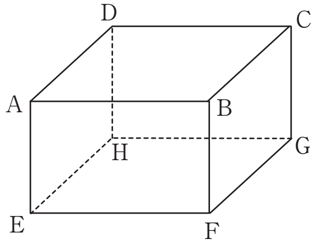
｛解答｝

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第25講　確認テスト

1　点 P (2, 1, 3) から xy 平面に垂線 PA を下ろしたとき，A (ア ， イ ， ウ) である。

2　直方体 ABCD － EFGH において，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{c}$　とおくと，$\overrightarrow{DF}=$ エ である。 エ に当てはまるものを次の①～④から選び，数字で答えよ。



①　$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$　　②　$\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$　　③　$\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$　　④　$\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$

3　(1)　$\vec{a}=(2,\ 1,\ -1)$，$\vec{b}=(3,\ -1,\ -2)$ のとき，$2\vec{a}-\vec{b}=($ オ ， カ ， キ $)$ である。

(2)　2 点 A(−2, 2, 5)，B (4, −1, 3) について，$\overrightarrow{AB}=($ ク ，− ケ ，− コ $)$，$|\overrightarrow{AB}|=$ サ である。

4　$\overrightarrow{AB}=(1,\ 2,\ -1)$，$\overrightarrow{AC}=(2,\ 1,\ 1)$ のとき，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$ シ である。よって，$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ のなす角 θ は $\theta=$ スセ °である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ Note }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第26講　空間図形とベクトル

§1 位置ベクトル

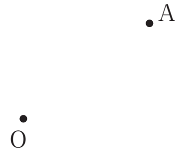
要点整理 と 公式

要点 1 位置ベクトル

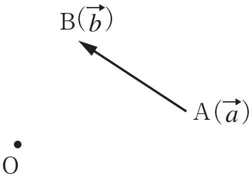
平面同様，空間においても，1 点 O を固定し，この点を基準とすると，点 A の位置は

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$

で表すことができる。このようなベクトル $\vec{a}$ を，点 O に関する点 A の「位置ベクトル」といい，位置ベクトルが $\vec{a}$ である点を「 A$(\vec{a})$ 」と表す。



また，2 点 A $(\vec{a})$，B$(\vec{b})$ に対し，$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ と表される。



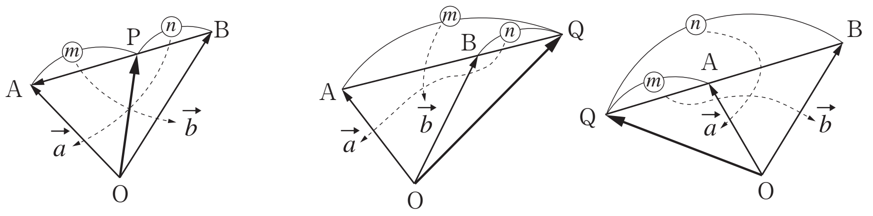
要点 2 分点の位置ベクトル

平面同様，次のことが成り立つ。

■ **内分点，外分点の位置ベクトル**

2 点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$ に対し，線分 AB を $m:n$ に内分する点 P の位置ベクトルを $\vec{p}$，外分する点 Q の位置ベクトルを $\vec{q}$ とすると，

$$\vec{p} = \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n} \qquad \vec{q} = \frac{-n\vec{a} + m\vec{b}}{m-n}$$



$m > n$　　　$m < n$

線分 AB の中点 M の位置ベクトル $\vec{m}$ は　$m = \dfrac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

また，空間の 3 点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$，C$(\vec{c})$ を頂点とする △ABC の重心 G の位置ベクトル $\vec{g}$ は

$$\vec{g} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$$

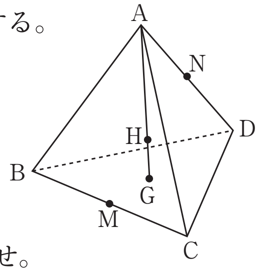
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1

4 点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$，C$(\vec{c})$，D$(\vec{d})$ を頂点とする四面体 ABCD において，辺 BC の中点をM$(\vec{m})$，辺 AD の中点を N$(\vec{n})$ とする。

(1)　線分 MN の中点 P を表す位置ベクトル $\vec{p}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を用いて表せ。

(2)　△BCD の重心を G$(\vec{g})$ とし，線分 AG を 3：1 に内分する点を H$(\vec{h})$ とする。$\vec{h}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を用いて表せ。



Point Pickup

内分点，外分点，三角形の重心を表す位置ベクトル

3 点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$，C$(\vec{c})$ に対し

線分 AB を m：n に

内分する点 P の位置ベクトルは　$\vec{p}=\dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$

外分する点 Q の位置ベクトルは　$\vec{q}=\dfrac{-n\vec{a}+m\vec{b}}{m-n}=\dfrac{n\vec{a}-m\vec{b}}{-m+n}$

△ABC の重心 G の位置ベクトルは　$\vec{g}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§2 ▶ 一直線上にある点

要点整理 と 公式

要点③ 一直線上にある3点

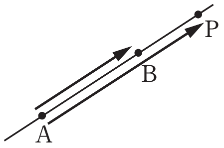
空間においても，平面の場合と同様に次のことが成り立つ。

■ **一直線上の点**

3点A，B，Pが一直線上にある。

$\Longleftrightarrow$　直線AB上に点Pがある。

$\Longleftrightarrow$　$\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AB}$ を満たす実数 k が存在する。



(ex) 右の図の直方体ABCD − EFGHにおいて，

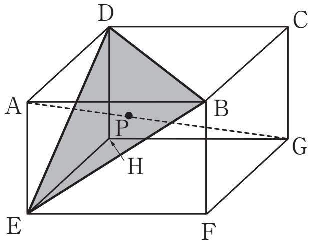
△BDEの重心Pは対角線AG上にあることを示す。

$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$，$\overrightarrow{AD} = \vec{b}$，$\overrightarrow{AE} = \vec{c}$　とおくと，

$\overrightarrow{AG} =$

また，$\overrightarrow{AP} =$

よって，$\overrightarrow{AG} =$　$\overrightarrow{AP}$ より，点Pは対角線AG上にある。



また，同じ平面上にある4点に関して，次のことが成り立つ。

■ **同一平面上の点**

一直線上にない3点A，B，Cが定める平面ABCについて，

点Pが平面ABC上にある。

$\Longleftrightarrow$　$\overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$ を満たす実数 s，t が存在する。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ メモ }

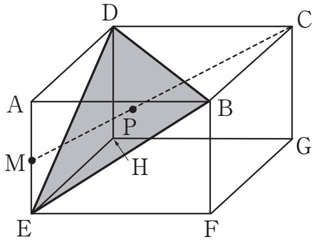
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2

直方体 ABCD − EFGH において，辺 AE の中点を M，△BDE の重心を P とする。$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$，$\overrightarrow{AD} = \vec{b}$，$\overrightarrow{AE} = \vec{c}$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2)　C，P，M は一直線上にあることを証明せよ。



Point Pickup

一直線上の点

3 点 A，B，P が一直線上にある。

$\iff$　$\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AB}$ を満たす実数 k が存在する。

ベクトルの分解

あるベクトルの始点を別の点に変えたいとき，差の性質を用いて

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

のようにベクトルを「分割」するとよい。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§3 ▶ 座標空間における線分の長さと分点の座標

要点整理 と 公式

要点4 座標空間における 2 点間の距離

座標空間上の 2 点 $A(a_1, a_2, a_3)$，$B(b_1, b_2, b_3)$について，

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$= (b_1, b_2, b_3) - (a_1, a_2, a_3)$

$= (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$

以上より，次のことが成り立つ。

■ 2 点間の距離

2 点 $A(a_1, a_2, a_3)$，$B(b_1, b_2, b_3)$について

$$AB = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

要点5 座標空間における内分点，外分点の座標

座標空間上の 2 点$A(a_1, a_2, a_3)$，$B(b_1, b_2, b_3)$について，線分 AB を $m:n$ に内分する点を P，$m:n$ に外分する点を Q とすると，

$$\overrightarrow{OP} = \frac{n\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB}}{m+n},\qquad \overrightarrow{OQ} = \frac{-n\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB}}{m-n}$$

である。よって，次のことが成り立つ。

■ 内分点，外分点の座標

2 点 $A(a_1, a_2, a_3)$，$B(b_1, b_2, b_3)$を結ぶ線分 AB を

$m:n$ に内分する点の座標は $\left(\dfrac{na_1 + mb_1}{m+n}, \dfrac{na_2 + mb_2}{m+n}, \dfrac{na_3 + mb_3}{m+n}\right)$

$m:n$ に外分する点の座標は $\left(\dfrac{-na_1 + mb_1}{m-n}, \dfrac{-na_2 + mb_2}{m-n}, \dfrac{-na_3 + mb_3}{m-n}\right)$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(ex) 2点 A(3, 1, 4), B(4, 5, 1) について，線分 AB を

2：1 に内分する点の座標は $\left(\dfrac{1\times 3+2\times 4}{2+1},\ \dfrac{1\times 1+2\times 5}{2+1},\ \dfrac{1\times \quad +2\times \quad}{2+1}\right)$

$=\left(\dfrac{11}{3},\ \dfrac{11}{3},\ \quad\right)$

2：1 に外分する点の座標は $\left(\dfrac{-1\times 3+2\times 4}{2-1},\ \dfrac{-1\times 1+2\times 5}{2-1},\ \dfrac{-1\times 4+2\times 1}{2-1}\right)$

$=(5,\ 9,\ -2)$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3

２点 A(1, 2, 3), B(−1, 3, 2)について，次のものを求めよ。

(1)　線分 AB の長さ

(2)　線分 AB を 2：3 に内分する点の座標

(3)　線分 AB を 2：3 に外分する点の座標

Point Pickup

２点間の距離と内分点，外分点の座標

２点 A (a_1, a_2, a_3), B (b_1, b_2, b_3)について

$$AB = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

線分 AB を

$m:n$ に内分する点の座標は $\left(\dfrac{na_1 + mb_1}{m+n}, \dfrac{na_2 + mb_2}{m+n}, \dfrac{na_3 + mb_3}{m+n}\right)$

$m:n$ に外分する点の座標は $\left(\dfrac{-na_1 + mb_1}{m-n}, \dfrac{-na_2 + mb_2}{m-n}, \dfrac{-na_3 + mb_3}{m-n}\right)$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

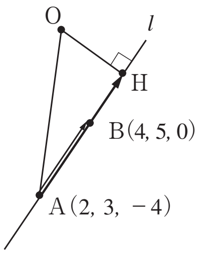
{ 解答 }

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

§4 ▶ 空間図形への内積の応用

要点整理 と 公式

要点6 空間図形への内積の応用



2 点 A(2, 3, −4)，B(4, 5, 0)を通る直線 l に，原点 O から垂線 OH を下ろしたとき，点 H の座標を求める。

点 H は直線 AB 上にあるので

$$\overrightarrow{AH} = t\overrightarrow{AB}$$

を満たす実数 t が存在する。

よって，

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}$$

表される。ここで，

$\overrightarrow{OA}$ = (　　,　　,　　)，$\overrightarrow{AB}$ = (　　,　　,　　)

より

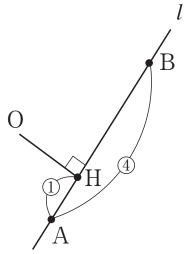
$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB} = (2,\ 3,\ -4) + t(2,\ 2,\ 4) = (2t + 2,\ 2t + 3,\ 4t - 4)$

と表される。

ここで，OH ⊥ AB より，$\overrightarrow{OH}$　$\overrightarrow{AB}$ =

よって，$(2t + 2) \times 2 + (2t + 3) \times 2 + (4t - 4) \times 4 = 0$

$$t = \frac{1}{4}$$



したがって，$\overrightarrow{OH} = \left(\frac{5}{2},\ \frac{7}{2},\ -3\right)$

ゆえに，点 H の座標は $\left(\frac{5}{2},\ \frac{7}{2},\ -3\right)$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

｛メモ｝

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

4

2 点 A(3, 5, 2)，B(0, 2, 5) を通る直線に，原点 O から垂線 OH を下ろしたとき，点 H の座標を求めよ。

Point Pickup

一直線上の点

3 点 A，B，H が一直線上にある。

$\iff$ $\overrightarrow{AH} = k\overrightarrow{AB}$ を満たす実数 k が存在する。

垂直と内積

$\vec{a} \neq \vec{0}$，$\vec{b} \neq \vec{0}$ で，$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$，$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ のとき

$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第26講　確認テスト

1　4 点 A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)，C($\vec{c}$)，D($\vec{d}$) を頂点とする四面体ABCDにおいて，辺 AB の中点をK($\vec{k}$)，辺 CD の中点を L($\vec{l}$) とする。

$\vec{k} = \dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{\boxed{ア}}$，　$\vec{l} = \dfrac{\vec{c}+\vec{d}}{\boxed{イ}}$ である。

2　直方体 ABCD － EFGH において，△BDE の重心を P とする。

$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{c}$　とおくと，$\overrightarrow{AG}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$　である。

また，$\overrightarrow{AP} = \dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{\boxed{ウ}}$ である。よって，$\overrightarrow{AG} = \boxed{エ}\,\overrightarrow{AP}$ より，

点 P は対角線 AG 上にある。

3　2 点 A(−1，4，5)，B (3，2，3)に関して，AB = $\boxed{オ}\sqrt{\boxed{カ}}$である。

また，線分 AB を 1：2 に内分する点の座標は，$\left(\dfrac{\boxed{キ}}{3},\ \dfrac{\boxed{クケ}}{3},\ \dfrac{\boxed{コサ}}{3}\right)$

である。

4　3 点 A(0，1，4)，B(4，5，0)，P (4t，4t + 1，− 4t + 4)について，

$\overrightarrow{OP}$ = (4t，4t + 1，− 4t + 4)，$\overrightarrow{AB}$ = ($\boxed{シ}$，$\boxed{ス}$，−$\boxed{セ}$) である。

よって，OP⊥AB のとき，P の座標は ($\boxed{ソ}$，$\boxed{タ}$，$\boxed{チ}$)である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ Note }

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

テキスト解答

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第14講　微分係数と導関数

1

(1) $\dfrac{f(3)-f(1)}{3-1}=\dfrac{(-3\cdot 3^2)-(-3\cdot 1^2)}{2}=\dfrac{-27-(-3)}{2}=-12$

(2) $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{(1+h)-1}=\dfrac{\{-3(1+h)^2\}-(-3\cdot 1^2)}{h}=\dfrac{(-3-6h-3h^2)-(-3)}{h}=\dfrac{-3h^2-6h}{h}$

$=\dfrac{h(-3h-6)}{h}=-3h-6$

2

[1] (1) $\lim_{x\to 0}(4+x)=4$　　(2) $\lim_{h\to 0}\dfrac{h^2-5h}{h}=\lim_{h\to 0}(h-5)=-5$

[2] 関数$f(x)=-2x^2$ の $x=-1$ における微分係数は

$$f'(-1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-2(-1+h)^2-(-2)\cdot(-1)^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-2h^2+4h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(-2h+4)}{h}=\lim_{h\to 0}(-2h+4)=4$$

関数$f(x)=-2x^2$ のグラフ上の点$(-1,\ -2)$における接線の傾きは $f'(-1)=4$

3

(1) $f(x)=x$ のとき

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=\lim_{h\to 0}1=1$$

(2) $f(x)=x^2$ のとき

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x$$

(3) $f(x)=x^3$ のとき

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2)=3x^2$$

(4) $f(x)=4$ のとき

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4-4}{h}=\lim_{h\to 0}0=0$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

4

$f(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 2$ より

$f'(x) = (x^3)' - 4(x^2)' - 3(x)' + (2)'$

$= 3x^2 - 4 \cdot 2x - 3 \cdot 1 + 0$

$= 3x^2 - 8x - 3$

$f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1 - 3 = -8$

$f'(t) = 3t^2 - 8t - 3$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第15講　接線の方程式，関数の増減と極大・極小

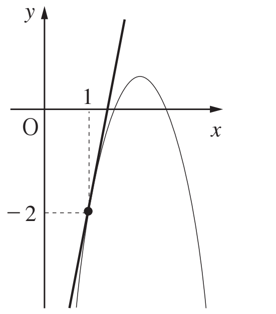
1

［1］ $f(x) = -x^2 + 5x - 6$ とおくと，$f'(x) = -2x + 5$

よって，$x = 1$　における接線の傾きは　$f'(1) = 3$

したがって，点$(1,\ -2)$における接線の方程式は

$y = 3(x-1) - 2$　　つまり　$y = 3x - 5$



［2］ $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$ とおくと，$f'(x) = 4x + 3$

$f'(x) = -5$　より　$4x + 3 = -5$　よって　$x = -2$

また，$f(-2) = 3$ より，接点の座標は$(-2,\ 3)$

よって，求める接線の方程式は

$y = -5(x+2) + 3$　つまり　$y = -5x - 7$

2

$y = -x^2 - 2x - 3$　より，$y' = -2x - 2$

接点の x 座標を t とおくと，接点の y 座標は $-t^2 - 2t - 3$

また，接線の傾きは　$-2t - 2$

よって，求める接線の方程式は

$y = (-2t-2)(x-t) - t^2 - 2t - 3$

つまり $y = (-2t-2)x + t^2 - 3$　……①

この直線が点 A$(0,\ 1)$を通るので，

$1 = (-2t-2)\cdot 0 + t^2 - 3$

$t^2 = 4$　　よって　$t = \pm 2$

よって求める接線の方程式は，①より

$t = 2$ のとき　$y = -6x + 1$

$t = -2$ のとき　$y = 2x + 1$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

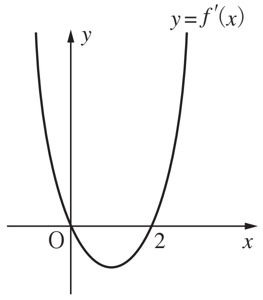
3

(1)　$f(x)=x^3-3x^2$　より　$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$　となるのは　$x=0,\ 2$ のとき

$f(x)$ の増減表は以下。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	0	↘	-4	↗

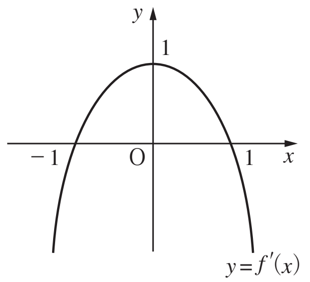


(2)　$f(x)=-\dfrac{1}{3}x^3+x+2$　より　$f'(x)=-x^2+1=-(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$　となるのは　$x=-1,\ 1$ のとき

$f(x)$ の増減表は以下。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$\frac{4}{3}$	↗	$\frac{8}{3}$	↘



4

(1)　$f(x)=3x^3-9x^2+6$　より　$f'(x)=9x^2-18x=9x(x-2)$

$f'(x)=0$　となるのは　$x=0,\ 2$ のとき

$f(x)$ の増減表は以下。

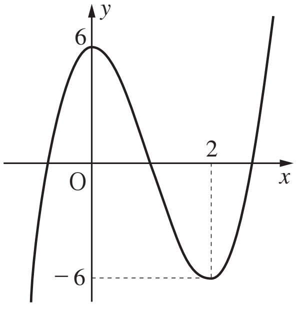
x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	6	↘	-6	↗
		極大		極小	

よって，

$x=0$ で極大値 6，$x=2$ で極小値 -6

をとる。

グラフは右図。



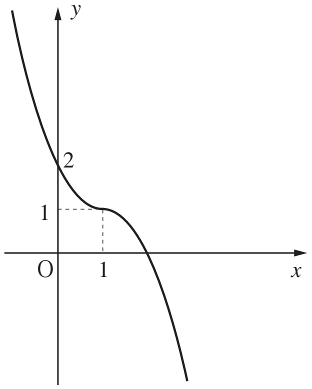
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(2)　$y=-x^3+3x^2-3x+2$　より　$y'=-3x^2+6x-3=-3(x^2-2x+1)=-3(x-1)^2$

$y'=0$　となるのは　$x=1$　のとき

y の増減表は以下。

x	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	0	$-$
y	↘	1	↘



よって，y はつねに減少し，極値はない。

グラフは右図。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

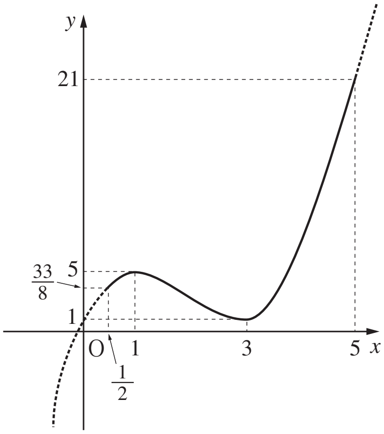
第16講　関数の最大・最小，方程式への応用，不定積分

1

(1)　$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$　より　$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$

区間　$\frac{1}{2} \leqq x \leqq 5$　における増減表は以下。

x	$\frac{1}{2}$	…	1	…	3	…	5
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$\frac{33}{8}$	↗	5	↘	1	↗	21



したがって，

$x = 5$　で最大値 21

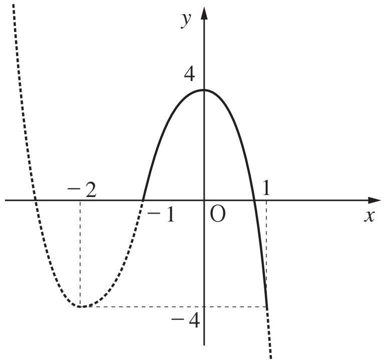
$x = 3$　で最小値 1

をとる。

(2)　$y = -2x^3 - 6x^2 + 4$　より　$f'(x) = -6x^2 - 12x = -6x(x+2)$

区間 $-1 \leqq x \leqq 1$ における増減表は以下。

x	−1	…	0	…	1
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	0	↗	4	↘	−4



したがって，

$x = 0$　で最大値 4

$x = 1$　で最小値 −4

をとる。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

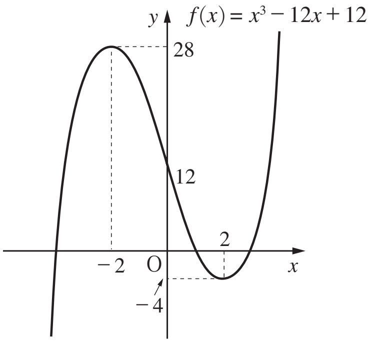
2

(1)　$f(x)=x^3-12x+12$　とおくと,

$$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$$

$f(x)$ の増減表は以下。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	28	↘	-4	↗



したがって，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになり，

グラフと x 軸の共有点の個数は 3 個である。

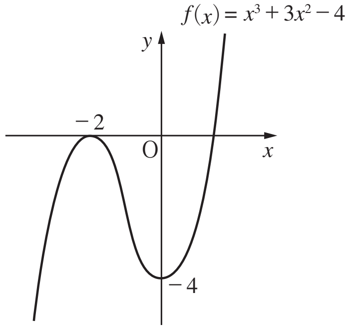
ゆえに，方程式　$x^3-12x+12=0$　の異なる実数解の個数は 3 個である。

(2)　$f(x)=x^3+3x^2-4$　とおくと

$$f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$$

$f(x)$ の増減表は以下。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	0	↘	-4	↗



したがって，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになり，

グラフと x 軸の共有点の個数は 2 個である。

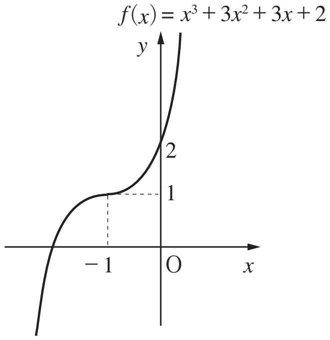
ゆえに，方程式 $x^3+3x^2-4=0$　の異なる実数解の個数は 2 個である。

(3)　$f(x)=x^3+3x^2+3x+2$　とおくと

$$f'(x)=3x^2+6x+3=3(x+1)^2$$

$f(x)$ の増減表は以下。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	↗	1	↗



したがって，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになり，

グラフと x 軸の共有点の個数は 1 個である。

ゆえに，方程式　$x^3+3x^2+3x+2=0$　の異なる実数解の個数は 1 個である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3

(1)　$\left(x^3\right)' = 3x^2$　より，$\left(\dfrac{1}{3}x^3\right)' = x^2$

よって　$\displaystyle\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + C$　　（Cは定数）

(2)　$(x)' = 1$　より　$\displaystyle\int 1dx = x + C$　（Cは定数）

4

(1)　$\displaystyle\int(3x^2 - 4x + 5)dx = 3\int x^2dx - 4\int xdx + 5\int dx$

$$= 3\cdot\frac{1}{3}x^3 - 4\cdot\frac{1}{2}x^2 + 5\cdot x + C = x^3 - 2x^2 + 5x + C$$（Cは定数）

(2)　$\displaystyle\int(4t^2 - 1)dt = 4\int t^2dt - \int dt$

$$= 4\cdot\frac{1}{3}t^3 - t + C = \frac{4}{3}t^3 - t + C$$（Cは定数）

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第17講　定積分と面積

1

(1) $\int_1^3 (2x+3)\,dx = \left[x^2+3x\right]_1^3$

$= (3^2+3\cdot 3) - (1^2+3\cdot 1) = 18 - 4 = 14$

(2) $\int_{-2}^1 (3x^2-18x-21)\,dx = \left[x^3-9x^2-21x\right]_{-2}^1$

$= (1^3 - 9\cdot 1^2 - 21\cdot 1) - \{(-2)^3 - 9\cdot(-2)^2 - 21\cdot(-2)\}$

$= (-29) - (-2) = -27$

2

(1) $\int_1^1 (3x^2-5x)\,dx = 0$

(2) $\int_{-2}^1 (3x^2-x+2)\,dx - \int_2^1 (3x^2-x+2)\,dx$

$= \int_{-2}^1 (3x^2-x+2)\,dx + \int_1^2 (3x^2-x+2)\,dx$

$= \int_{-2}^2 (3x^2-x+2)\,dx$

$= 3\int_{-2}^2 x^2\,dx - \int_{-2}^2 x\,dx + 2\int_{-2}^2 dx$

$= 3\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-2}^2 - \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^2 + 2\left[x\right]_{-2}^2$

$= \{2^3-(-2)^3\} - \frac{1}{2}\{2^2-(-2)^2\} + 2\{2-(-2)\}$

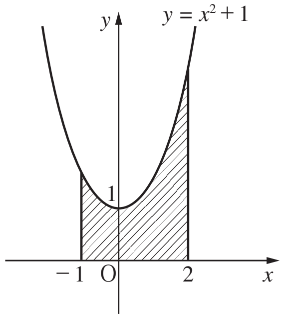
$= (8+8) - \frac{1}{2}(4-4) + 2(2+2)$

$= 16 - 0 + 8 = 24$

3

(1) 右図より

$S = \int_{-1}^2 (x^2+1)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}+x\right]_{-1}^2$



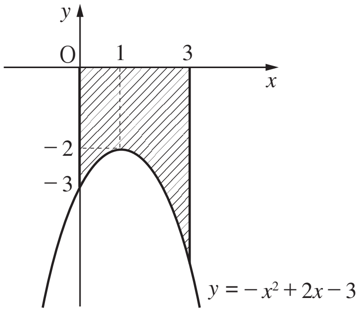
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$$= \left(\frac{8}{3} + 2\right) - \left(-\frac{1}{3} - 1\right) = 6$$

(2)　$y = -x^2 + 2x - 3 = -(x-1)^2 - 2$ より，

区間 $0 \leqq x \leqq 3$ では $y < 0$　である。

よって，求める面積は



$$S = \int_0^3 \{-(-x^2 + 2x - 3)\}\,dx$$

$$= \int_0^3 (x^2 - 2x + 3)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x\right]_0^3 = (9 - 9 + 9) - (0 - 0 + 0) = 9$$

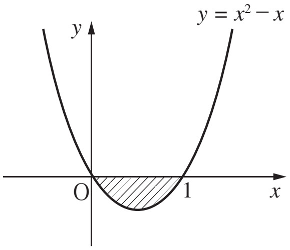
4

［1］　放物線 $y = x^2 - x$ と x 軸との交点の x 座標は

方程式 $x^2 - x = 0$　を解いて

$x(x-1) = 0$　より　$x = 0,\ 1$

よって，求める部分の面積は



$$\int_0^1 \{-(x^2 - x)\}\,dx$$

$$= \int_0^1 (-x^2 + x)\,dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) - (0 + 0) = \frac{1}{6}$$

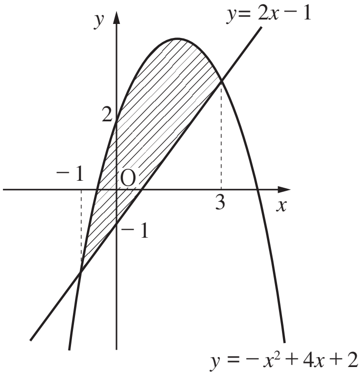
［2］　放物線 $y = -x^2 + 4x + 2$ と $y = 2x - 1$ の交点の x 座標は

方程式 $-x^2 + 4x + 2 = 2x - 1$　を解いて

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$(x+1)(x-3) = 0$　より　$x = -1, 3$　である。

よって，求める部分の面積は



$$\int_{-1}^3 \{(-x^2 + 4x + 2) - (2x - 1)\}\,dx$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$$= \int_{-1}^{3} (-x^2 + 2x + 3)\,dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\right]_{-1}^{3} = (-9 + 9 + 9) - \left(\frac{1}{3} + 1 - 3\right) = \frac{32}{3}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第18講　数列，等差数列

1

［1］（1）$a_1 = 2 \cdot 1 - 3 = -1$，$a_2 = 2 \cdot 2 - 3 = 1$，$a_3 = 2 \cdot 3 - 3 = 3$

$a_4 = 2 \cdot 4 - 3 = 5$，$a_5 = 2 \cdot 5 - 3 = 7$

（2）$a_1 = 2^0 = 1$，$a_2 = 2^1 = 2$，$a_3 = 2^2 = 4$，$a_4 = 2^3 = 8$，$a_5 = 2^4 = 16$

［2］初項 1，末項 16，項数 5

2

［1］$a_n = -2 + (n-1) \cdot 3 = 3n - 5$

第 20 項は $a_{20} = 3 \cdot 20 - 5 = 55$

［2］（1）初項 a は　$a = 3$　　公差 d は　$d = 8 - 3 = 5$

一般項は　$a_n = 3 + (n-1) \cdot 5 = 5n - 2$

（2）初項 a は　$a = 19$　　公差 d は $d = 12 - 19 = -7$

一般項は　$a_n = 19 + (n-1) \cdot (-7) = -7n + 26$

3

（1）初項を a，公差を d とおくと，

$a_n = a + (n-1)d$

$a_2 = 9$　より　$a + d = 9$　……①

$a_6 = -7$　より　$a + 5d = -7$　……②

①，②より　$a = 13$，$d = -4$

よって，$a_n = 13 + (n-1) \cdot (-4) = -4n + 17$

（2）$a_{20} = -4 \cdot 20 + 17 = -63$

（3）$a_n = -23$　より　$-4n + 17 = -23$　　$n = 10$　　よって第 10 項

4

［1］$S = \dfrac{8(29+1)}{2} = 120$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

［2］（1）$S=\dfrac{20\{2\cdot1+(20-1)\cdot2\}}{2}=400$

（別解）　この等差数列の末項は　$a_{20}=1+(20-1)\cdot2=39$

よって　$S=\dfrac{20(1+39)}{2}=400$

（2）この等差数列の一般項は　$a_n=2+(n-1)\cdot5=5n-3$

項数を n とすると　$5n-3=72$　より　$n=15$

よって　$S=\dfrac{15(2+72)}{2}=555$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第19講　等比数列，等差中項と等比中項

1

［1］　$a_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$

第 6 項は　$a_6 = 2^6 = 64$

［2］（1）初項は　$a = 48$　　公比は　$r = 12 \div 48 = \dfrac{1}{4}$

一般項は　$a_n = 48 \cdot \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$

（2）初項は　$a = 2$　　公比は　$r = (-10) \div 2 = -5$

一般項は　$a_n = 2 \cdot (-5)^{n-1}$

2

（1）初項を a，公比を r とすると，

$$a_n = ar^{n-1}$$

$a_4 = 81$　より　$ar^3 = 81$　……①

$a_6 = 729$　より　$ar^5 = 729$　……②

②÷①より　$\dfrac{ar^5}{ar^3} = \dfrac{729}{81}$　　$r^2 = 9$　　よって　$r = \pm 3$

$r = 3$ のとき　①より $a = 3$

よって　$a_n = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$

$r = -3$ のとき ①より $a = -3$

よって　$a_n = -3 \cdot (-3)^{n-1} = (-3)^n$

したがって，求める一般項は　$a_n = 3^n$　または　$a_n = (-3)^n$

（2）初項を a，公比を r とすると，

$$a_n = ar^{n-1}$$

$a_2 = 48$　より　$ar = 48$　……①

$a_5 = -6$　より　$ar^4 = -6$　……②

②÷①より　$\dfrac{ar^4}{ar} = \dfrac{-6}{48}$　　$r^3 = -\dfrac{1}{8}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

公比は実数より　$r = -\dfrac{1}{2}$　　このとき ①より $-\dfrac{1}{2}a = 48$　　$a = -96$

したがって，求める一般項は　$a_n = -96 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

3

（1）　$S = \dfrac{5(2^6 - 1)}{2 - 1} = 5 \cdot 63 = 315$

（2）　$S = \dfrac{8\{1 - (-3)^5\}}{1 - (-3)} = \dfrac{8 \cdot 244}{4} = 488$

（3）　$S_n = \dfrac{1\left\{1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}}{1 - \dfrac{1}{3}} = \dfrac{1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n}{\dfrac{2}{3}} = \dfrac{3}{2}\left\{1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}$

4

（1）　等差数列は隣り合う 2 項の差が等しいので

$x - 3 = 15 - x$

よって　$x = 9$

（別解）

等差中項の性質より　$2x = 3 + 15$　　　よって　$x = 9$

（2）　等比数列は隣り合う 2 項の比が等しいので

$\dfrac{x}{3} = \dfrac{48}{x}$　　$x^2 = 144$　　よって　$x = \pm 12$

（別解）

等比中項の性質より　$x^2 = 3 \cdot 48$　　$x^2 = 144$　　　よって $x = \pm 12$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第20講　和の記号Σ，階差数列

1

［1］ (1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots + a_{n-1}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{4}(3k+1) = (3\cdot1+1)+(3\cdot2+1)+(3\cdot3+1)+(3\cdot4+1)$

$= 4 + 7 + 10 + 13$

(3) $\displaystyle\sum_{m=1}^{n} 2\cdot3^{m-1} = 2\cdot3^0 + 2\cdot3^1 + 2\cdot3^2 + \cdots\cdots + 2\cdot3^{n-1} = 2 + 6 + 18 + \cdots\cdots + 2\cdot3^{n-1}$

［2］ (1) $2+4+6+8+10 = (2\cdot1)+(2\cdot2)+(2\cdot3)+(2\cdot4)+(2\cdot5)$

$\displaystyle = \sum_{k=1}^{5} 2k$

(2) $\displaystyle 3^2 + 4^2 + 5^2 + \cdots\cdots + n^2 = \sum_{k=3}^{n} k^2$

2

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k+4) = \sum_{k=1}^{n}2k + \sum_{k=1}^{n}4 = 2\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}4$

$\displaystyle = 2\cdot\frac{1}{2}n(n+1) + 4n$

$= n(n+1) + 4n$

$= n(n+1+4)$

$= n(n+5)$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^2-3k+2) = \sum_{k=1}^{n}k^2 - 3\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}2$

$\displaystyle = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - 3\cdot\frac{1}{2}n(n+1) + 2n$

$\displaystyle = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{6}\cdot9n(n+1) + \frac{1}{6}\cdot12n$

$\displaystyle = \frac{1}{6}n\{(n+1)(2n+1) - 9(n+1) + 12\}$

$\displaystyle = \frac{1}{6}n(2n^2 - 6n + 4)$

$\displaystyle = \frac{1}{3}n(n^2 - 3n + 2) = \frac{1}{3}n(n-1)(n-2)$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3

数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$\{b_n\}$ は

2，4，8，16，……

である。この数列は，初項 2，公比 2 の等比数列である。

よって，$\{b_n\}$ の一般項は $b_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$ と表される。

したがって

$$a_6 = a_5 + b_5 = 31 + 32 = 63$$

$$a_7 = a_6 + b_6 = 63 + 64 = 127$$

4

(1)　数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$\{b_n\}$ は

1，5，9，13，……

これは，初項 1，公差 4 の等差数列より，$b_n = 1 + (n-1) \cdot 4 = 4n - 3$ と表される。

よって，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}(4k-3)$$

$$= 1 + 4 \cdot \frac{1}{2}(n-1)n - 3(n-1)$$

$$= 2n^2 - 5n + 4$$

この式において，$n = 1$ のとき $2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 4 = 1$ である。

$a_1 = 1$より，この式は $n = 1$ のときも成り立つ。

したがって，求める一般項は　$a_n = 2n^2 - 5n + 4$

(2)　数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$\{b_n\}$ は

1，3，9，27，……

これは，初項 1，公比 3 の等比数列より，$b_n = 1 \cdot 3^{n-1} = 3^{n-1}$ と表される。

よって，$n \geqq 2$のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 3 + \sum_{k=1}^{n-1} 3^{k-1}$$

$$= 3 + \frac{1 \cdot (3^{n-1} - 1)}{3-1}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$$= 3 + \frac{1}{2}(3^{n-1} - 1) = \frac{1}{2} \cdot 3^{n-1} + \frac{5}{2}$$

この式において，$n = 1$ のとき $\frac{1}{2} \cdot 3^0 + \frac{5}{2} = 3$ である。

$a_1 = 3$ より，この式は $n = 1$ のときも成り立つ。

したがって，求める一般項は $a_n = \frac{1}{2} \cdot 3^{n-1} + \frac{5}{2}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第21講　数列の和と一般項，漸化式，数学的帰納法

1

(1)　$a_1 = S_1 = 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 = 5$　である。

また，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (3n^2 + 2n) - \{3(n-1)^2 + 2(n-1)\} \\ &= (3n^2 + 2n) - (3n^2 - 4n + 1) \\ &= 6n - 1 \end{aligned}$$

$a_1 = 5$ より，この式は $n = 1$ のときも成り立つ。

したがって，$a_n = 6n - 1$

(2)　$a_1 = S_1 = 2^1 - 1 = 1$　である。

また，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (2^n - 1) - (2^{n-1} - 1) \\ &= 2^n - 2^{n-1} \\ &= 2 \cdot 2^{n-1} - 1 \cdot 2^{n-1} = (2-1) \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1} \end{aligned}$$

$a_1 = 1$ より，この式は $n = 1$ のときも成り立つ。

したがって，$a_n = 2^{n-1}$

2

(1)　$a_1 = 2$，$a_2 = a_1 - 2 = 0$，$a_3 = a_2 - 2 = -2$，$a_4 = a_3 - 2 = -4$，$a_5 = a_4 - 2 = -6$

(2)　$a_1 = 3$，$a_2 = 3a_1 - 2 \cdot 1 = 3 \cdot 3 - 2 = 7$，$a_3 = 3a_2 - 2 \cdot 2 = 3 \cdot 7 - 4 = 17$，

$a_4 = 3a_3 - 2 \cdot 3 = 3 \cdot 17 - 6 = 45$，$a_5 = 3a_4 - 2 \cdot 4 = 3 \cdot 45 - 8 = 127$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3

［1］（1）初項 -3，公差 5 の等差数列を表す。

よって，$a_n = -3 + (n-1)\cdot 5 = 5n - 8$

（2）初項 9，公比 3 の等比数列を表す。

よって，$a_n = 9 \cdot 3^{n-1} = 3^2 \cdot 3^{n-1} = 3^{n+1}$

［2］（1）数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$b_n = 8n$ である。

したがって，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 4 + \sum_{k=1}^{n-1} 8k = 4 + 8\cdot\frac{1}{2}(n-1)n = 4(n^2 - n + 1)$$

$a_1 = 4$ より，この式は $n = 1$ のときも成り立つ。

よって，$a_n = 4(n^2 - n + 1)$

（2）数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$b_n = 4^n$ である。

したがって，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 4^k = 2 + \frac{4(4^{n-1} - 1)}{4 - 1} = \frac{4^n + 2}{3}$$

$a_1 = 2$ より，この式は $n = 1$ のときも成り立つ。

よって，$a_n = \dfrac{4^n + 2}{3}$

4

［1］$n = 1$ のとき，左辺 $= 1$，右辺 $= \dfrac{1}{2}\cdot 1 \cdot (3\cdot 1 - 1) = 1$

よって，①は成り立つ。

［2］$n = k$ のとき，①が成り立つと仮定すると

$$1 + 4 + 7 + \cdots\cdots + (3k - 2) = \frac{1}{2}k(3k - 1)$$

$n = k + 1$ のとき，①の左辺を変形すると

$$1 + 4 + 7 + \cdots\cdots + (3k - 2) + \{3(k + 1) - 2\}$$

$$= 1 + 4 + 7 + \cdots\cdots + (3k - 2) + (3k + 1)$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$$=\frac{1}{2}k(3k-1)+(3k+1)$$

$$=\frac{1}{2}\{k(3k-1)+2(3k+1)\}$$

$$=\frac{1}{2}(3k^2+5k+2)$$

$$=\frac{1}{2}(k+1)(3k+2)$$

$$=\frac{1}{2}(k+1)\{3(k+1)-1\}$$

よって，$n=k+1$ のときも①は成り立つ。

［1］，［2］より，すべての自然数 n について，①が成り立つ。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第22講　平面上のベクトル

1

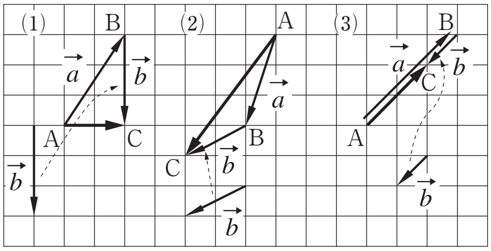
(1)　$\vec{a}$ と $\vec{e}$, $\vec{d}$ と $\vec{i}$

(2)　$\vec{c}$ と $\vec{h}$

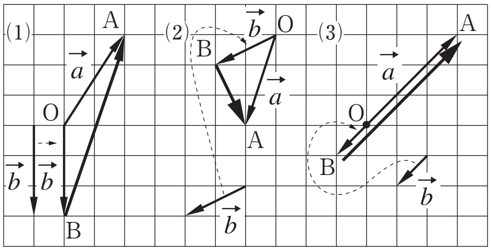
(3)　$\vec{a}$ と $\vec{e}$, $\vec{d}$ と $\vec{i}$, $\vec{b}$ と $\vec{f}$

2

［1］　(1)～(3) のそれぞれについて，図の $\overrightarrow{AC}$ が求める $\vec{a}+\vec{b}$

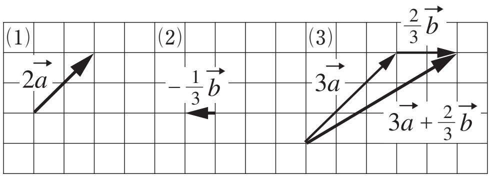


［2］　(1)～(3) のそれぞれについて，図の $\overrightarrow{BA}$ が求める $\vec{a}-\vec{b}$



3

［1］



［2］　(1)　$4\vec{a}+3\vec{a}-5\vec{a}=(4+3-5)\vec{a}=2\vec{a}$

(2)　$\vec{a}-2\vec{b}-3\vec{a}-\vec{b}=(1-3)\vec{a}+(-2-1)\vec{b}=-2\vec{a}-3\vec{b}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(3)　$3(\vec{a}-4\vec{b})-2(\vec{a}-6\vec{b})=3\vec{a}-12\vec{b}-2\vec{a}+12\vec{b}=\vec{a}$

4

(1)　$\overrightarrow{FC}=2\vec{a}$

(2)　$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}=\vec{a}+\vec{b}$

(3)　$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}=-\vec{a}+\vec{b}$

（別解）　$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第23講　ベクトルの成分表示，内積

1

［1］ $\vec{a}=(-3,\ -2)$，$\vec{b}=(0,\ 1)$

$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{(-3)^2+(-2)^2}=\sqrt{13}$，$\left|\vec{b}\right|=1$

［2］ (1) $\vec{a}-\vec{b}=(2,\ -1)-(-3,\ 2)=(2+3,\ -1-2)=(5,\ -3)$

(2) $2\vec{a}+3\vec{b}=2(2,\ -1)+3(-3,\ 2)=(4,\ -2)+(-9,\ 6)=(-5,\ 4)$

2

(1) $\overrightarrow{AB}=(5-1,\ 2-3)=(4,\ -1)$，$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{4^2+(-1)^2}=\sqrt{17}$

$\overrightarrow{BC}=(7-5,\ 4-2)=(2,\ 2)$，$\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$

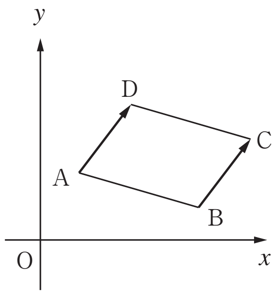
(2) D$(x,\ y)$とすると，四角形 ABCD が平行四辺形に

なるための条件は $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ より

$(x-1,\ y-3)=(2,\ 2)$

よって　$x-1=2$，$y-3=2$　より　$x=3$，$y=5$

したがって D$(3,\ 5)$



3

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos30^\circ=\sqrt{3}\times2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3$

(2) $BC=\sqrt{AC^2-AB^2}=1$ より

$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BC}=\left|\overrightarrow{CA}\right|\left|\overrightarrow{BC}\right|\cos120^\circ=2\times1\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-1$

(3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{BC}\right|\cos90^\circ=\sqrt{3}\times1\times0=0$

4

［1］ (1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times0+1\times4=0+4=4$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times6+3\times(-4)=12-12=0$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

［2］ $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{2^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{7}$， $\left|\vec{b}\right| = \sqrt{1^2 + (3\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{7}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times 1 + (-\sqrt{3}) \times 3\sqrt{3} = 2 - 9 = -7$

よって　$\cos\theta = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|} = \dfrac{-7}{\sqrt{7} \times 2\sqrt{7}} = -\dfrac{1}{2}$

$0° \leqq \theta \leqq 180°$　より　$\theta = 120°$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第24講　内積の利用，位置ベクトル，ベクトル方程式

1

［1］ (1) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{c}+\vec{d})=\vec{a}\cdot(\vec{c}+\vec{d})+\vec{b}\cdot(\vec{c}+\vec{d})$

$=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{d}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{d}$

(2) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b})+\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{b})$

$=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{b}$

$=\left|\vec{a}\right|^2-\left|\vec{b}\right|^2$

(3) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})+\vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{b})$

$=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}$

$=\left|\vec{a}\right|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2$

［2］ $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\left|\vec{a}\right|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2$

$=3^2+2\times4+2^2=21$

$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|\geqq0$ より $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{21}$

2

［1］ (1) $\vec{p}=\dfrac{1\cdot\vec{a}+3\cdot\vec{b}}{3+1}=\dfrac{\vec{a}+3\vec{b}}{4}=\dfrac{1}{4}\vec{a}+\dfrac{3}{4}\vec{b}$

$\vec{q}=\dfrac{(-1)\cdot\vec{a}+3\cdot\vec{b}}{3-1}=\dfrac{-\vec{a}+3\vec{b}}{2}=-\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{3}{2}\vec{b}$

(2) $\vec{p}=\dfrac{5\cdot\vec{a}+2\cdot\vec{b}}{2+5}=\dfrac{\overrightarrow{5a}+2\vec{b}}{7}=\dfrac{5}{7}\vec{a}+\dfrac{2}{7}\vec{b}$

$\vec{q}=\dfrac{5\cdot\vec{a}+(-2)\cdot\vec{b}}{-2+5}=\dfrac{5\vec{a}-2\vec{b}}{3}=\dfrac{5}{3}\vec{a}-\dfrac{2}{3}\vec{b}$

［2］ 辺 BC の中点 M を表す位置ベクトルを $\vec{m}$ とすると

$\vec{m}=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$

重心 G は，中線 AM を 2：1 に内分する点であることから，その位置ベクトル $\vec{g}$ は

$$\vec{g}=\dfrac{1\cdot\vec{a}+2\cdot\vec{m}}{2+1}=\dfrac{\vec{a}+2\left(\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right)}{3}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3

(1) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{b}+\vec{d}$

$\overrightarrow{AE}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AD}=\dfrac{3}{5}\vec{d}$

$\overrightarrow{AF}=\dfrac{2\vec{b}+5\vec{d}}{5+2}=\dfrac{2}{7}\vec{b}+\dfrac{5}{7}\vec{d}$

(2) $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AE}=(\vec{b}+\vec{d})-\dfrac{3}{5}\vec{d}=\vec{b}+\dfrac{2}{5}\vec{d}$

$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}=\left(\dfrac{2}{7}\vec{b}+\dfrac{5}{7}\vec{d}\right)-\dfrac{3}{5}\vec{d}=\dfrac{2}{7}\vec{b}+\dfrac{4}{35}\vec{d}=\dfrac{2}{7}\left(\vec{b}+\dfrac{2}{5}\vec{d}\right)$

よって，$\overrightarrow{EF}=\dfrac{2}{7}\overrightarrow{EC}$　より，3 点 E，F，C は一直線上にある。

4

(1) $(x,\ y)=(2,\ -3)+t(-1,\ 5)=(2-t,\ -3+5t)$

よって $\begin{cases} x=2-t \\ y=-3+5t \end{cases}$

(2) $(x,\ y)=(1-t)(-1,\ 6)+t(2,\ 1)=(-1+t,\ 6-6t)+(2t,\ t)$

$=(-1+3t,\ 6-5t)$

よって $\begin{cases} x=-1+3t \\ y=6-5t \end{cases}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第25講　空間のベクトル

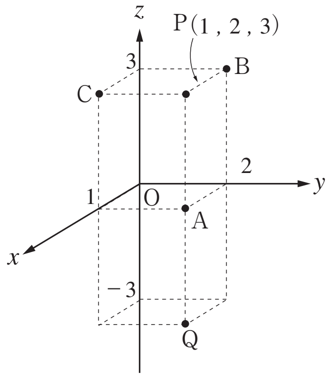
1

(1) A(1, 2, 0)

B(0, 2, 3)

C(1, 0, 3)

(2) Q(1, 2, −3)



2

(1) $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \vec{a} + \vec{c}$

(2) $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

(3) $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GC} = \vec{b} - \vec{c}$

(4) $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$

3

[1] $3\vec{a} - 2\vec{b} = 3(1,\ -1,\ 1) - 2(2,\ 0,\ -2)$

$= (3,\ -3,\ 3) + (-4,\ 0,\ 4) = (-1,\ -3,\ 7)$

$\left|3\vec{a} - 2\vec{b}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2 + 7^2} = \sqrt{59}$

[2] $\overrightarrow{AB} = (1-3,\ 2-4,\ 3-(-5)) = (-2,\ -2,\ 8)$

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 8^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$

4

[1] △ACF は 1 辺の長さが $3\sqrt{2}$ の正三角形より，$\angle CAF = 60°$

よって $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AF} = \left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\overrightarrow{AF}\right|\cos 60° = 3\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} \times \dfrac{1}{2} = 9$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

［2］ $\overrightarrow{BA} = (4-2,\ 3-1,\ 6-2) = (2,\ 2,\ 4)$ より $|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{2^2+2^2+4^2} = 2\sqrt{6}$

$\overrightarrow{BC} = (4-2,\ 1-1,\ 4-2) = (2,\ 0,\ 2)$ より $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{2^2+0^2+2^2} = 2\sqrt{2}$

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = 2\times 2 + 2\times 0 + 4\times 2 = 12$

よって $\cos\angle ABC = \dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|} = \dfrac{12}{2\sqrt{6}\times 2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0^\circ \leqq \angle ABC \leqq 180^\circ$ より $\angle ABC = 30^\circ$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第26講　空間図形とベクトル

1

(1)　$\vec{m}=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$，$\vec{n}=\dfrac{\vec{a}+\vec{d}}{2}$

よって，$\vec{p}=\dfrac{\vec{m}+\vec{n}}{2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}+\dfrac{\vec{a}+\vec{d}}{2}\right)=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}$

(2)　$\vec{g}=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{3}$

よって，$\vec{h}=\dfrac{\vec{a}+3\vec{g}}{3+1}=\dfrac{\vec{a}+3\times\dfrac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{3}}{4}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{4}$

2

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\dfrac{1}{2}\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{a}+\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}-(\vec{a}+\vec{b})=\dfrac{-2\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}}{3}$

$\overrightarrow{\mathrm{CM}}=\overrightarrow{\mathrm{AM}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\dfrac{1}{2}\vec{c}-(\vec{a}+\vec{b})=\dfrac{-2\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}}{2}$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{CM}}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{CP}}$　より，C，P，M は一直線上にある。

3

(1)　$\mathrm{AB}=\sqrt{(-1-1)^2+(3-2)^2+(2-3)^2}=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$

(2)　$\left(\dfrac{3\times1+2\times(-1)}{2+3},\ \dfrac{3\times2+2\times3}{2+3},\ \dfrac{3\times3+2\times2}{2+3}\right)$　よって$\left(\dfrac{1}{5},\ \dfrac{12}{5},\ \dfrac{13}{5}\right)$

(3)　$\left(\dfrac{3\times1+(-2)\times(-1)}{-2+3},\ \dfrac{3\times2+(-2)\times3}{-2+3},\ \dfrac{3\times3+(-2)\times2}{-2+3}\right)$　よって$(5,\ 0,\ 5)$

4

点 H は直線 AB 上にあるので

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

を満たす実数 t が存在する。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

よって，

$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}$

と表される。ここで，

$\overrightarrow{OA} = (3,\ 5,\ 2)$，$\overrightarrow{AB} = (-3,\ -3,\ 3)$

より

$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB} = (3,\ 5,\ 2) + t(-3,\ -3,\ 3) = (-3t+3,\ -3t+5,\ 3t+2)$

と表される。

ここで，$OH \perp AB$ より，$\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

よって，$(-3t+3)\times(-3) + (-3t+5)\times(-3) + (3t+2)\times 3 = 0$

$$t = \frac{2}{3}$$

したがって，$\overrightarrow{OH} = (1,\ 3,\ 4)$

ゆえに，点 H の座標は　$(1,\ 3,\ 4)$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

確認テスト解答

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第14講　確認テスト

1 関数 $f(x) = 2x^2$ において，x の値が 1 から 4 まで変化するときの関数 $f(x)$ の平均変化率は $\boxed{アイ}$ である。

2 関数 $f(x) = 2x^2$ の $x = -2$ における微分係数は $\boxed{ウエ}$ である。

3 関数 $f(x) = 3x^2$ の導関数を定義に従って求めると

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\boxed{オ}\,xh + \boxed{カ}\,h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \left(\boxed{オ}\,x + \boxed{カ}\,h\right) = \boxed{キ}\,x$$

となる。

4 関数 $f(x) = 3x^3 - 5x^2 - 2x + 1$ を微分すると，$f'(x) = \boxed{ク}\,x^2 - \boxed{ケコ}\,x - \boxed{サ}$ となる。

よって，$x = -1$ における微分係数は $f'(-1) = \boxed{シス}$ である。

{ 解答 }

1 ア　1　　イ　0

2 ウ　－　　エ　8

3 オ　6　　カ　3　　キ　6

4 ク　9　　ケ　1　　コ　0　　サ　2　　シ　1　　ス　7

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第15講　確認テスト

1　関数 $f(x) = -x^2 + 2x - 3$ について，$y = f(x)$ のグラフ上の点$(2,\ -3)$ における接線の傾きは［アイ］であり，接線の方程式は $y =$［アイ］$x +$［ウ］である。

2　関数　$y = x^2 + 1$ のグラフに点 $(2,\ 1)$から引いた接線の方程式を求める。接点の x 座標を $x = t$ とおくと，接線の傾きは［エ］t であり，接線の方程式は
$y =$［エ］$tx - t^2 +$［オ］と表される。この接線が点 $(2,\ 1)$ を通るとき，$t = 0$,［カ］となる。したがって，求める接線の方程式は $y = 1$，$y =$［キ］$x -$［クケ］である。

3　関数　$f(x) = x^3 - 3x$ の増減を調べ，下の増減表を完成せよ。
ただし［ス］～［ツ］は，次の①～④の中から選び，数字で答えよ(同じものを選んでもよい)。

①　＋　　②　－　　③　↗　　④　↘

x	…	コサ	…	シ	…
$f'(x)$	ス	0	セ	0	ソ
$f(x)$	タ	2	チ	-2	ツ

4　関数　$y = -2x^3 + 3x^2 - 1$ は，$x =$［テ］で極大値［ト］，$x =$［ナ］で極小値［ニヌ］をとる。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{ 解答 }

1	ア　－	イ　2	ウ　1		
2	エ　2	オ　1	カ　4	キ　8	
	ク　1	ケ　5			
3	コ　－	サ　1	シ　1		
	ス　①	セ　②	ソ　①	タ　③	
	チ　④	ツ　③			
4	テ　1	ト　0	ナ　0	ニ　－	ヌ　1

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第16講　確認テスト

1　関数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5\ (-2 \leqq x \leqq 3)$ は，$x =$ ［ア］，［イ］（［ア］＜［イ］）で最大値［ウ］，$x =$ ［エオ］で最小値［カキク］をとる。

2　次の方程式の異なる実数解の個数を求めよ。

(1)　$x^3 - 6x^2 + 9x - 3 = 0$　［ケ］個

(2)　$x^3 + 3x^2 - 9x + 5 = 0$　［コ］個

3　$\int 1dx = x + C$，$\int x\,dx = \dfrac{1}{［サ］}x^{［シ］} + C$，$\int x^2\,dx = \dfrac{1}{［ス］}x^{［セ］} + C$（$C$ は定数）である。

4　$\int (2x^2 - 3x + 1)dx = \dfrac{［ソ］}{［タ］}x^3 - \dfrac{3}{［チ］}x^{［ツ］} + x + C$（$C$ は定数）である。

{ 解答 }

1　ア　0　　イ　3　　ウ　5　　エ　−　　オ　2

カ　−　　キ　1　　ク　5

2　ケ　3　　コ　2

3　サ　2　　シ　2　　ス　3　　セ　3

4　ソ　2　　タ　3　　チ　2　　ツ　2

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第17講　確認テスト

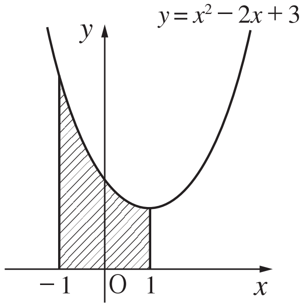
1 $\int_{-1}^{3}(3x^2-4x-5)dx=$ アイ である。

2 $\int_{1}^{1}x^2\,dx=$ ウ である。

また，$\int_{1}^{2}(3x-1)dx+\int_{2}^{3}(3x-1)dx=\int_{1}^{\boxed{エ}}(3x-1)dx=$ オカ である。

3 放物線 $y=x^2-2x+3$ と x 軸，および 2 直線 $x=-1,\ 1$ で

囲まれた部分の面積は $\dfrac{\boxed{キク}}{\boxed{ケ}}$ である。



4 (1) $y=x^2-3x$ と x 軸によって囲まれた部分の面積は $\dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}$ である。

(2) 放物線 $y=-x^2+4x-5$ と直線 $y=-2x$ の交点の x 座標は $x=$ シ，ス である。

ただし，シ < ス とする。

よって，この放物線と直線で囲まれる部分の面積は $\dfrac{\boxed{セソ}}{\boxed{タ}}$ である。

{解答}

1 ア －　イ 8

2 ウ 0　エ 3　オ 1　カ 0

3 キ 2　ク 0　ケ 3

4 (1) コ 9　サ 2

(2) シ 1　ス 5　セ 3　ソ 2　タ 3

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第18講　確認テスト

1　数列 $\{a_n\}$ の一般項が $a_n = \dfrac{1}{n+1}$ で表される数列の初項は $\dfrac{1}{\boxed{ア}}$，第 3 項は $\dfrac{1}{\boxed{イ}}$ である。

また，数列 2，4，6，8，10，12，14 の初項は $\boxed{ウ}$，末項は $\boxed{エオ}$，項数は $\boxed{カ}$ である。

2　等差数列 $\{a_n\}$ が -2，4，10，16，…… で与えられるとき，その初項は $a = \boxed{キク}$，公差は $d = \boxed{ケ}$ である。また，一般項は $a_n = \boxed{コ}\,n - \boxed{サ}$ である。

3　第 5 項が 15，第 12 項が 29 である等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n = \boxed{シ}\,n + \boxed{ス}$ である。また，この数列の第 15 項は $\boxed{セソ}$，119 はこの数列の第 $\boxed{タチ}$ 項である。

4　初項 2，末項 27，項数 20 の等差数列の和は $\boxed{ツテト}$ である。

また，初項 3，公差 5，項数 15 の等差数列の和は $\boxed{ナニヌ}$ である。

{ 解答 }

1	ア　2	イ　4	ウ　2	エ　1	オ　4	カ　7
2	キ　−	ク　2	ケ　6	コ　6	サ　8	
3	シ　2	ス　5	セ　3	ソ　5	タ　5	チ　7
4	ツ　2	テ　9	ト　0	ナ　5	ニ　7	ヌ　0

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第19講　確認テスト

1 等比数列 $\{a_n\}$ が 2，6，18，54，…… で与えられるとき，その初項は $a=$ ア ，公比は $r=$ イ である。また，一般項は $a_n=$ ウ ・ エ $^{n-1}$ である。

2 第 2 項が 6，第 4 項が 54 である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n=$ オ ・ カ $^{n-1}$ または $a_n=$ キク ・(ケコ)$^{n-1}$ である。

3 初項 4，公比 2，項数 7 の等比数列の和は サシス である。
また，初項 6，公比 -2，項数 4 の等比数列の和は セソタ である。

4 数列 3，x，17 が等差数列のとき，$x=$ チツ である。
また，数列 2，x，18 が等比数列のとき，$x=$ テト ， ナ である。

{ 解答 }

1	ア　2	イ　3	ウ　2	エ　3		
2	オ　2	カ　3	キ　−	ク　2	ケ　−	コ　3
3	サ　5	シ　0	ス　8	セ　−	ソ　3	タ　0
4	チ　1	ツ　0	テ　−	ト　6	ナ　6	

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第20講　確認テスト

1 $\sum_{k=1}^{3}(2k+1)=3+\boxed{ア}+7$　である。

また，$2^2+3^2+4^2+\cdots\cdots+10^2=\sum_{k=\boxed{イ}}^{\boxed{ウエ}} k^2$　である。

2 $\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{1}{\boxed{オ}}n(n+1)(2n+1)$，$\sum_{k=1}^{n} k=\frac{1}{\boxed{カ}}n(n+1)$，$\sum_{k=1}^{n}(-3)=\boxed{キク}n$　より

$\sum_{k=1}^{n}(2k^2+k-3)=\frac{1}{\boxed{ケ}}n(n-1)(\boxed{コ}n+13)$　である。

3 数列$\{a_n\}$の階差数列を$\{b_n\}$とする。数列$\{a_n\}$が 1，2，5，10，17，…… であるとき，

$\{b_n\}$は 1，3，5，7，…… である。よって，$b_n=\boxed{サ}n-\boxed{シ}$　である。

よって，$b_5=\boxed{ス}$であることから，$a_6=\boxed{セソ}$　である。

4 数列　$\{a_n\}$が 2，6，12，20，30，…… であるとき，階差数列を　$\{b_n\}$　とすると，

$b_n=\boxed{タ}n+\boxed{チ}$である。よって，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1} b_k=\boxed{ツ}+\sum_{k=1}^{n-1}(\boxed{タ}k+\boxed{チ})=n^2+n$$

$a_1=2$ より，この式は $n=1$ のときも成り立つ。

よって，$a_n=n^2+n$　である。

{ 解答 }

1	ア　5	イ　2	ウ　1	エ　0		
2	オ　6	カ　2	キ　－	ク　3	ケ　6	コ　4
3	サ　2	シ　1	ス　9	セ　2	ソ　6	
4	タ　2	チ　2	ツ　2			

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第21講　確認テスト

1 初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n = n^2$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項について，

$a_1 =$ [ア] である。また，$n \geqq 2$ のとき $a_n = S_n - S_{n-1} =$ [イ] $n -$ [ウ] である。

よって，この式は $n = 1$ のときも成り立つ。したがって，$a_n =$ [イ] $n -$ [ウ] である。

2 $a_1 = 2$，$a_{n+1} = 2a_n - 3$ ($n = 1$，2，3，……) で定義される数列 $\{a_n\}$ において，

$a_2 = 2a_1 - 3 =$ [エ]，$a_3 =$ [オカ]，$a_4 =$ [キク] である。

3 (1) $a_1 = -1$，$a_{n+1} = a_n + 6$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n =$ [ケ] $n -$ [コ] である。

(2) $a_1 = 5$，$a_{n+1} = 2a_n$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n =$ [サ] ・ [シ] $^{n-1}$ である。

4 $2 + 4 + 6 + \cdots\cdots + 2n = n(n + 1)$ …… ① が成り立つことを数学的帰納法で示す。

［1］ $n = 1$ のとき　①の左辺 $=$ [ス]，　①の右辺 $=$ [ス] より①は成り立つ。

［2］ $n = k$ のとき，①が成り立つと仮定すると

$$2 + 4 + 6 + \cdots\cdots + 2k = k(k + 1)$$

$n = k + 1$ のとき，①の左辺を変形すると

$$2 + 4 + 6 + \cdots\cdots + 2k + 2(k + \text{[セ]})$$

$$= 2 + 4 + 6 + \cdots\cdots + 2k + (2k + 2)$$

$$= k(k + 1) + (2k + 2)$$

$$= (k + \text{[ソ]})(k + \text{[タ]})$$ （ただし，[ソ] ＜ [タ] とする）

$$= (k + 1)\{(k + 1) + 1\}$$

よって，$n = k + 1$ のときも①は成り立つ。

［1］［2］より，①はすべての自然数 n で成り立つ。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

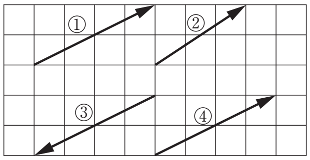
{ 解答 }

1	ア	1	イ	2	ウ	1					
2	エ	1	オ	−	カ	1	キ	−	ク	5	
3	(1) ケ	6	コ	7	(2) サ	5	シ	2			
4	ス	2	セ	1	ソ	1	タ	2			

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第22講　確認テスト

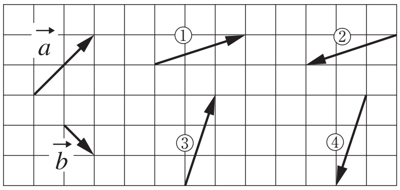
1　右の図で，ベクトル①と次の関係にあるベクトルを数字で答えよ。



(1)　等しいベクトル　［ア］

(2)　逆ベクトル　［イ］

2　右の図で，$\vec{a}+\vec{b}$ を表すベクトルは［ウ］，$\vec{a}-\vec{b}$ を表すベクトルは［エ］である。［ウ］，［エ］に当てはまるものを①～④から選び，数字で答えよ。

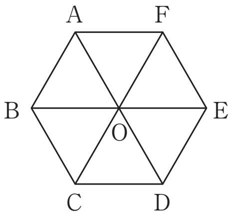


3　次の計算をせよ。

(1)　$\vec{a}-3\vec{a}+5\vec{a}=$ ［オ］$\vec{a}$

(2)　$2(\vec{a}+3\vec{b})-(3\vec{a}+4\vec{b})=$ ［カ］$\vec{a}+$［キ］$\vec{b}$

4　正六角形 ABCDEF において，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とする。



(1)　$\overrightarrow{EB}=$ ［クケ］$\vec{b}$である

(2)　$\overrightarrow{AO}=$［コ］，$\overrightarrow{FB}=$［サ］である。［コ］，［サ］に当てはまるものを，下の①～④から選び，数字で答えよ。

①　$\vec{a}+\vec{b}$　②　$\vec{a}-\vec{b}$　③　$-\vec{a}+\vec{b}$　④　$-\vec{a}-\vec{b}$

{ 解答 }

1　(1)　ア　④　　(2)　イ　③

2　ウ　①　　エ　③

3　(1)　オ　3　　(2)　カ　−　　キ　2

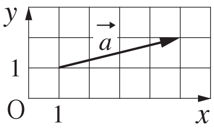
4　(1)　ク　−　　ケ　2　　(2)　コ　①　　サ　②

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第23講　確認テスト

1 (1)　右図において

$\vec{a}=(\boxed{ア},\ \boxed{イ})$，$|\vec{a}|=\sqrt{\boxed{ウエ}}$ である。



(2)　$\vec{a}=(-1,\ 1)$，$\vec{b}=(1,\ 2)$ のとき，$\vec{a}+\vec{b}=(\boxed{オ},\ \boxed{カ})$，

$-2\vec{a}+3\vec{b}=(\boxed{キ},\ \boxed{ク})$ である。

2　2 点 A$(-3,\ 4)$，B$(2,\ 0)$ について，$\overrightarrow{AB}=(\boxed{ケ},\ \boxed{コサ})$，$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{\boxed{シス}}$ である。

3　$|\vec{a}|=6$，$|\vec{b}|=5$，$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角が $60°$ のとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\boxed{セソ}$ である。

4　$\vec{a}=(-1,\ \sqrt{3})$，$\vec{b}=(-3,\ \sqrt{3})$ のとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\boxed{タ}$ である。

また，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とすると，$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{\boxed{チ}}}{\boxed{ツ}}$ より，$\theta=\boxed{テト}°$ である。

｛解答｝

1 (1)　ア　4　　イ　1　　ウ　1　　エ　7

(2)　オ　0　　カ　3　　キ　5　　ク　4

2　ケ　5　　コ　－　　サ　4　　シ　4　　ス　1

3　セ　1　　ソ　5

4　タ　6　　チ　3　　ツ　2　　テ　3　　ト　0

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第24講　確認テスト

1 $\left|\vec{a}\right| = 3$，$\left|\vec{b}\right| = 1$，$\vec{a}\cdot\vec{b} = 2$　のとき，$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$ の値を求める。

$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^{\boxed{ア}} = (\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = \left|\vec{a}\right|^2 - \boxed{イ}\,\vec{a}\cdot\vec{b} + \left|\vec{b}\right|^2 = 3^2 - \boxed{イ} \times 2 + 1^2 = \boxed{ウ}$

である。

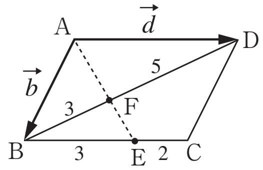
$\left|\vec{a}-\vec{b}\right| \geqq 0$　より　$\left|\vec{a}-\vec{b}\right| = \sqrt{\boxed{ウ}}$　である。

2 2点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$ を結ぶ線分 AB を 4：3 に内分する点 P の位置ベクトル $\vec{p}$ は

$\vec{p} = \dfrac{\boxed{エ}\,\vec{a} + \boxed{オ}\,\vec{b}}{\boxed{カ}}$，4：3 に外分する点 Q の位置ベクトル $\vec{q}$ は

$\vec{q} = -\boxed{キ}\,\vec{a} + \boxed{ク}\,\vec{b}$　である。

3 平行四辺形 ABCD において，辺 BC を 3：2 に内分する点を E，対角線 BD を 3：5 に内分する点を F とする。$\overrightarrow{AB} = \vec{b}$，$\overrightarrow{AD} = \vec{d}$



とすると，$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} + \dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}\overrightarrow{BC} = \vec{b} + \dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}\vec{d}$　である。

また，$\overrightarrow{AF} = \dfrac{\boxed{サ}\,\vec{b} + \boxed{シ}\,\vec{d}}{8} = \dfrac{\boxed{サ}}{8}\vec{b} + \dfrac{\boxed{シ}}{8}\vec{d} = \dfrac{\boxed{サ}}{8}\left(\vec{b} + \dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}\vec{d}\right)$　である。

よって，$\overrightarrow{AF} = \dfrac{\boxed{サ}}{8}\overrightarrow{AE}$ より 3点 A，F，E は一直線上にある。

4 点 A(2，3)を通り，ベクトル $\vec{d} = (5,\ 4)$ に平行な直線を媒介変数表示で表すと

$$\begin{cases} x = \boxed{ス} + \boxed{セ}\,t \\ y = \boxed{ソ} + \boxed{タ}\,t \end{cases}$$

である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

｛解答｝

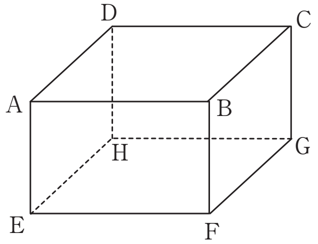
1	ア　2	イ　2	ウ　6		
2	エ　3	オ　4	カ　7	キ　3	ク　4
3	ケ　3	コ　5	サ　5	シ　3	
4	ス　2	セ　5	ソ　3	タ　4	

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第25講　確認テスト

1 点 P (2, 1, 3) から xy 平面に垂線 PA を下ろしたとき，A (ア ， イ ， ウ) である。

2 直方体 ABCD − EFGH において，$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$，$\overrightarrow{AD} = \vec{b}$，$\overrightarrow{AE} = \vec{c}$ とおくと，$\overrightarrow{DF}$ = エ である。 エ に当てはまるものを次の①～④から選び，数字で答えよ。



① $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$　　② $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$　　③ $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$　　④ $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$

3 (1) $\vec{a} = (2,\ 1,\ -1)$，$\vec{b} = (3,\ -1,\ -2)$ のとき，$2\vec{a} - \vec{b}$ = (オ ， カ ， キ) である。

(2) 2 点 A(−2, 2, 5)，B (4, −1, 3) について，$\overrightarrow{AB}$ = (ク ， − ケ ， − コ)，$|\overrightarrow{AB}|$ = サ である。

4 $\overrightarrow{AB} = (1,\ 2,\ -1)$，$\overrightarrow{AC} = (2,\ 1,\ 1)$ のとき，$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ = シ である。よって，$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ のなす角 θ は θ = スセ °である。

{ 解答 }

1 ア 2　　イ 1　　ウ 0

2 エ ③

3 (1) オ 1　　カ 3　　キ 0

(2) ク 6　　ケ 3　　コ 2　　サ 7

4 シ 3　　ス 6　　セ 0

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第26講　確認テスト

1　4 点 A($\vec{a}$)，B($\vec{b}$)，C($\vec{c}$)，D($\vec{d}$) を頂点とする四面体ABCDにおいて，辺 AB の中点を K($\vec{k}$)，辺 CD の中点を L($\vec{l}$) とする。

$\vec{k} = \dfrac{\vec{a} + \vec{b}}{\boxed{ア}}$，$\vec{l} = \dfrac{\vec{c} + \vec{d}}{\boxed{イ}}$ である。

2　直方体 ABCD − EFGH において，△BDE の重心を P とする。

$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$，$\overrightarrow{AD} = \vec{b}$，$\overrightarrow{AE} = \vec{c}$　とおくと，$\overrightarrow{AG} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$　である。

また，$\overrightarrow{AP} = \dfrac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{\boxed{ウ}}$ である。よって，$\overrightarrow{AG} = \boxed{エ}\,\overrightarrow{AP}$ より，

点 P は対角線 AG 上にある。

3　2 点 A(−1，4，5)，B (3，2，3)に関して，AB = $\boxed{オ}\sqrt{\boxed{カ}}$である。

また，線分 AB を 1：2 に内分する点の座標は，$\left(\dfrac{\boxed{キ}}{3}, \dfrac{\boxed{クケ}}{3}, \dfrac{\boxed{コサ}}{3}\right)$

である。

4　3 点 A(0，1，4)，B(4，5，0)，P (4t，4t + 1，− 4t + 4)について，

$\overrightarrow{OP}$ = (4t，4t + 1，− 4t + 4)，$\overrightarrow{AB}$ = ($\boxed{シ}$，$\boxed{ス}$，−$\boxed{セ}$) である。

よって，OP⊥AB のとき，P の座標は ($\boxed{ソ}$，$\boxed{タ}$，$\boxed{チ}$)である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

{解答}

1	ア　2	イ　2					
2	ウ　3	エ　3					
3	オ　2	カ　6	キ　1	ク　1	ケ　0	コ　1	サ　3
4	シ　4	ス　4	セ　4	ソ　1	タ　2	チ　3	

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

Ⓒ RECRUIT
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。